∞ ∞

Karl-Peter Dostal,

Einige Streifzüge in die Unendlichkeit

Mathematisches Basiswissen über das unendlich Große und unendlich Kleine,

- geordnet nach den Zahlbereichen,

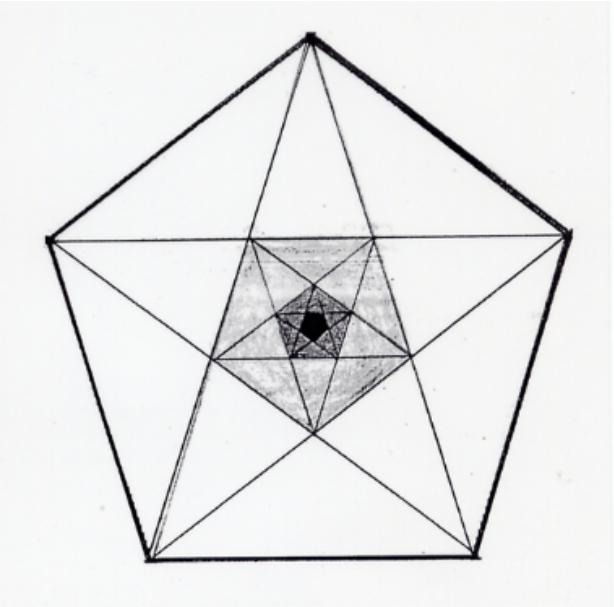
- wenige große Zahlen,

- einiges Historisches und Philosophisches,

- kaum Theologisches,

- ausgewählte Zitate,

- kleiner kosmischer Anhang.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $\infty - \infty = n$ oder $\infty - \infty = \infty$? „Alles ist Zahl“

Kleine Einstimmung

„Das Unendliche hat
wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt;
das Unendliche hat
wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt.“
David Hilbert (deutscher Mathematiker, 1862 - 1943)

Ein Blick in die Kulturgeschichte der exakten Wissenschaft zeigt, dass schon ihre Begründer, etwa die Vorsokratiker, mit dem Unendlichen gerungen haben, und seit der Antike war und ist das Unendliche ein oft kontrovers diskutiertes Thema von Philosophen, Mathematikern, Physikern, Astronomen und Theologen. Ein interessanter und auf den ersten Blick merkwürdiger Aspekt dabei ist die Tatsache, dass wir das Unendliche im gewöhnlichen Alltag direkt nicht bemerken. Insbesondere das mathematische Studium des Unendlichen zeigt indes, dass es dicht unter der manifesten Oberfläche der Erscheinungen enthalten ist und auf den zweiten Blick durchaus wahrgenommen werden kann.

Hierarchie der Zahlen: die wichtigsten Zahlbereiche

Jeder höhere Zahlbereich enthält alle niederen Zahlbereiche.

1) Natürliche Zahlen (0), 1, 2, 3, 4 ...
Man kann nicht uneingeschränkt subtrahieren (z. B. 5 - 6).
2) Ganze Zahlen -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3,
Man kann nicht uneingeschränkt dividieren (z. B. 5 : 6).
3) Rationale Zahlen = Brüche aus 2 ganzen Zahlen.
Man kann nicht uneingeschränkt radizieren (z. B. $\sqrt{2}$).
4) Reelle Zahlen
enthalten zusätzlich die irrationalen Zahlen ($\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π, Φ u. v. a. m.)
5) Komplexe Zahlen
Jede algebraische Gleichung positiven Grades ist lösbar.
Beispiele:
$x^2 - 1 = 0$ im Reellen lösbar, $x^2 + 1 = 0$ im Reellen nicht lösbar,
$x^2 - x - 1 = 0$ im Reellen lösbar, $x^2 + x + 1 = 0$ im Reellen nicht lösbar,
aber alle 4 Gleichungen sind im Bereich der komplexen Zahlen lösbar.

In jedem dieser Zahlbereiche gibt es interessante Entdeckungen zum Unendlichen.

Natürliche Zahlen ℕ

ℕ = {1; 2; 3; 4; ...} (hier) oder auch ℕ = {0; 1; 2; 3; 4; ...}.

1, 2, 3, 4, ... : einfachstes Beispiel einer <u>unendlichen Folge</u>;
denn gäbe es eine größte Zahl, bräuchte man nur 1 addieren.
Wir können uns das schrittweise vorstellen: „<u>potenzielles Unendlich</u>“.

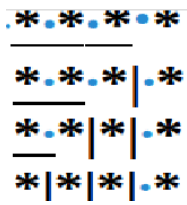
<u>Pythagoras (um 570 v. u. Z. - nach 510 v. u. Z.) und die Pythagoreer</u>
gewannen aus Zahlenmustern, „figurierten Zahlen“, mathematische Erkenntnisse:

Beispiel 1)

```
   *  o o o o
  * *  o o o
 * * *  o o
* * * *  o
```

Aus Dreieckszahlen die <u>Summe der ersten n natürlichen Zahlen</u>:
2 Dreiecke aus Steinchen wie in der Abb. aneinandergefügt
ergeben n Zeilen zu je n+1 Steinchen.
Daraus folgt die Summenformel
$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = n \cdot (n + 1) / 2$.

Beispiel 2)



<u>Summe der ungeraden Zahlen</u>:
Ungerade Zahlen: 1, 3, 5, 7 ... darstellbar als (2n - 1), n = 1, 2, 3, 4 ...
Gnomon aus ineinander geschachtelten Quadratzahlen:
Man kann ablesen: $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$.

<u>Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) als 9-jähriger trickreich 1 + 2 + 3 + … + 100:</u>

1	**2**	**3**	**4**	**...**	**100**
100	**99**	**98**	**97**	**...**	**1**
101	**101**	**101**	**101**	**...**	**101,**

die doppelte Summe ist also 100 · 101.

Verallgemeinert ergibt sich wie oben: $1+2+3+4+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

Dies ist das einfachste Beispiel für eine arithmetische Reihe.

Die Gleichungen gelten für unendlich viele Fälle.

Dessen ungeachtet scheuten sich die Pythagoreer vor der Unendlichkeit; sie hielten die natürlichen Zahlen, die der 1 am nächsten waren (und damit die „endlichsten“ Zahlen, die am weitesten vom Unendlichen entfernt waren), für die reinsten Zahlen. Auch Gauß protestierte noch 1831 „ *gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine Sprachweise* ...“. (Das hinderte ihn indes nicht an der Entwicklung der Differentialgeometrie, die mit unendlich kleinen Größen operiert.)

Die Primzahlen $\mathbb{P}$, eine wichtige Untermenge der natürlichen Zahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ...

Es gibt unendlich viele Primzahlen, wie schon Euklid (um 300 v. u. Z.) erkannte.

Beweis:
Annahme einer endlichen Menge $\{p_1, p_2, p_3, \ldots p_r\}$ von Primzahlen,
daraus die Zahl $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots \cdot p_r + 1$.
Diese Zahl ist durch keine der Primzahlen p_i teilbar, da immer ein Rest 1 bleibt.
Damit sind die Primfaktoren von n nicht in der Ausgangsmenge enthalten,
man kann also zu jeder endlichen Menge von Primzahlen eine weitere Primzahl hinzufügen.

⇒ Wir können etwas über das Unendliche aussagen,
ohne unendlich lange darüber nachgedacht zu haben.

NB.:

Größte bekannte Primzahl (gefunden Dez. 2017): $2^{77\,232\,917} - 1$,
hat $(77\,232\,917 \cdot \lg_{10} 2) = 23\,249\,725$ Stellen.

<u>Gödelisierung</u> (nach Kurt Gödel, 1906 - 1978)

Jedem Wort, Satz oder Text kann eine Zahl zugeordnet werden: „Gödelnummer“.

<u>Beispiel 1:</u> Freier Fall im Vakuum (Galilei um 1590): $s = g \cdot t^2/2$
(s = Weg, t = Zeit, g= Fallbeschleunigung). Anders geschrieben: „s = g mal t mal t : 2“.

Willkürliche Zuordnungsvorschrift:

g	mal	t	durch	2	s	=
1	2	3	4	5	6	7 .

<u>Die den Zeichen zugeordneten natürlichen Zahlen werden zu Primzahlexponenten und alle Primzahlpotenzen werden in aufsteigender Reihenfolge der Primzahlen multipliziert</u>: $2^6 \cdot 3^7 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^3 \cdot 19^4 \cdot 23^5 \approx 4{,}823 \cdot 10^{28}$.

<u>Der genaue (nicht gerundete) Wert des Produkts ist die Gödelnummer der Aussage</u>
$s = g \cdot t^2/2$“.

Bei Kenntnis der Vorschrift kann rückwärts aus der Gödelnummer auf den Inhalt der Aussage geschlossen werden. In ähnlicher Weise
kann jedem (noch so langen) Text eine einzige Zahl (Gödelnummer) zugeordnet werden, aus der sich rückwirkend der gesamte Text reproduzieren lässt.

<u>Beispiel 2:</u> „Alles ist Zahl“ (Essenz der pythagoreischen Philosophie)

Zuordnungsvorschrift:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Zwischenraum	Punkt
27	28

$$\underbrace{2^1\cdot 3^{12}\cdot 5^{12}\cdot 7^5\cdot 11^{19}}_{\text{ALLES}}\cdot 13^{27}\cdot\underbrace{17^9\cdot 19^{19}\cdot 23^{20}}_{\text{IST}}\cdot 29^{27}\cdot\underbrace{31^{26}\cdot 37\cdot 41^8\cdot 43^{12}}_{\text{ZAHL}}\cdot 47^{28}$$

Beim Ausmultiplizieren ergeben allein die Faktoren von 2^1 bis 19^{19} ein Produkt $> 10^{100}$, das die Möglichkeiten eines wissenschaftlichen Taschenrechners übersteigt.
Die Gödelnummer dieses einfachen Satzes ist also bereits unermesslich groß.

Im Prinzip aber lässt sich alles Wissen der Menschheit
(das ja immerhin noch endlich ist) in einer einzigen Zahl darstellen.
Selbst jene Zahl ist winzig (→ 0 %) gegenüber dem Unendlichen!

Die vollständige Induktion, ein wichtiges Beweismittel der Mathematik

Wenn eine Aussage für wenige natürliche Zahlen zutrifft, muss sie nicht für alle zutreffen.

Beispiel:

$f(n) = n^2 - n + 41$

$f(1) = 1^2 - 1 + 41 = 41$
$f(2) = 2^2 - 2 + 41 = 43$
$f(3) = 3^2 - 3 + 41 = 47$
$f(4) = 4^2 - 4 + 41 = 53$
.....
$f(40) = 40^2 - 40 + 41 = 1601$: Bis n = 40 ergeben sich immer Primzahlen,
aber $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 1681$: durch 41 teilbar!

<u>Ergebnis:</u> Vermutungen über die weitreichende Gültigkeit solcher Aussagen müssen für jeden Einzelfall genau untersucht werden.

Lässt sich eine bestimmte Behauptung über natürliche Zahlen für eine gewisse Anfangszahl begründen und lässt sich außerdem zeigen, dass aus ihrer Gültigkeit für eine beliebige Zahl k ihre Gültigkeit für die nächste Zahl k + 1 folgt, so gilt diese Behauptung für *alle* auf die Anfangszahl folgenden natürlichen Zahlen.

Schema:
1) Induktionsannahme: Die Aussage, die man beweisen will.
2) Induktionsanfang: Die Formel sei richtig für n = k.
3) Induktionsschluss: Prüfung, ob daraus die Richtigkeit für n = k+1 folgt
(dann ist die Aussage nämlich für alle n wahr).

Beispiel a): Summe der natürlichen Zahlen

nun zum 3. Mal, jetzt mit dem exakten Beweis durch vollständige Induktion:

1) Annahme: Die Gl. $1 + 2 + 3 + ... + n = n\cdot(n+1)/2$ sei richtig für beliebig große n.
2) Die Formel ist richtig z. B. für n = 2.
3) Folgt aus der Richtigkeit für k diejenige für k+1?
$[1 + 2 + 3 + ... + k] + (k+1) = [k\cdot(k+1)/2] + (k+1) = (k+1)\cdot(k/2 + 1) = (k+1)\cdot(k/2 +2/2)$
$= (k+1)\cdot(k+2)/2$: Die Formel gilt für alle auch noch so großen natürlichen Zahlen.

Wir haben wieder etwas über unendlich ferne Zahlen ausgesagt,
ohne unendlich lange zu rechnen.

Beispiel b): Potenzmenge = Menge aller Teilmengen

1 Element {a}: Teilmengen: {a}, {Ø = „leere“ Menge}, also 2 Teilmengen: $= 2^1$.
2 Elemente {a, b}: Teilmengen: {a, b}, {a}, {b}, {Ø}, also 4 Teilmengen (davon 2 echte): $= 2^2$.
3 Elemente {a, b, c}: Teilm.: {a, b, c}, {a, b },{a, c} {b, c}, {a }, {b }, { c}, {Ø} also 8 Teilm.: $= 2^3$.

1) Induktionsannahme:
Die Potenzmenge einer Menge von n Elementen enthält 2^n Teilmengen.
2) Induktionsanfang: Für 3 Elemente sind es 2^3 Teilmengen.
3) Prüfung für n+1 Elemente: Zu den bisherigen Teilmengen kommen noch diejenigen dazu, die zusätzlich das neue Element enthalten: Verdopplung, d. h. $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$:
Die Induktionsannahme ist bestätigt.
Wieder gilt dies für beliebig große, unendlich viele Mengen.

Daher hat man die vollständige Induktion als „die Leiter ins Unendliche“ bezeichnet.

Was heißt zählen?

Zählen ist eine eineindeutige, bijektive Zuordnung, Paarung von Objekten mit den natürlichen Zahlen, beginnend mit eins, aufwärts den Objekten zugeordnet.

Beispiel:

3 Objekte: Kreis K, Parallelogramm P, Dreieck D: $\Rightarrow$

3 geordnete Paare: (K ; 1), (P ; 2), (D ; 3).

Danach lassen sich keine weiteren Objekte mit Zahlen verknüpfen, und weil 3 die größte Zahl ist, die wir zuordnen konnten, wissen wir, dass es 3 Objekte s.

Allgemein ist die letzte zugeordnete Zahl die Gesamtzahl der Dinge: „Kardinalzahl“.

Das gleiche Abzählprinzip lässt sich auch auf unendliche Mengen anwenden:
Um herauszufinden, „wie viele“ Elemente in einer unendlichen Menge enthalten sind, weisen wir jedem Element eine natürliche Zahl zu und sehen, wie weit wir kommen.

<u>Galileis Paradoxon</u> (*Discorsi* …, 1638)

Zuordnung der Quadratzahlen zu einer natürlichen Zahl:

n^2:	**<u>1</u>**	**<u>4</u>**	**<u>9</u>**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100 ...**
n :	**<u>1</u>**	**2**	**3**	**<u>4</u>**	**5**	**6**	**7**	**8**	**<u>9</u>**	**10 …**

Geordnete Paare: (1 ; 1), (4 ; 2), (9 ; 3), (16 ; 4) … (n^2 ; n) ...

Einerseits ist es wieder eine Bijektion, denn wir kommen beliebig weit, d. h.
es gibt „genauso viele“ Quadratzahlen wie natürliche,
andererseits ist die Folge n anscheinend viel größer als n^2,
denn sie enthält unendlich viele Elemente 2, 3, 5, 6, 7… mehr.
Galilei war darüber bestürzt:
Er hat diese Paradoxie aufgedeckt, konnte sie aber nicht lösen.
<u>Galileis Entdeckung: Eine unendliche Menge kann in der Zahl ihrer Elemente mit einer kleineren Teilmenge ihrer selbst übereinstimmen.</u>

<u>Ein noch einfacheres Beispiel: Anzahl der geraden Zahlen</u> (andere Untermenge von ℕ)

(2 ; 1), (4 ; 2), (6 ; 3), (8 ; 4) ...

Mächtigkeit

Dieser wichtige Begriff stammt aus der Mengenlehre von Georg Cantor:
Zwei Mengen nennen wir gleichmächtig (Zeichen ~), wenn wir ihre Elemente paaren können, ohne dass dabei etwas übrig bleibt. Wenn etwas übrig bleibt von einer der beiden Mengen, dann sagen wir, diese Menge habe die größere Mächtigkeit.
Also ist die unendlich große Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig mit ihrer unendlich großen Untermenge der Quadratzahlen.

Definition einer unendlichen Menge nach Richard Dedekind (1831 - 1916):
Eine Menge heißt unendlich, falls sie zu einer echten Teilmenge gleichmächtig ist.
(Verallgemeinerung der Entdeckung Galileis)

Rechenregeln für Unendlich ?

$\infty + n = \infty$ **(1) ist unmittelbar einsichtig,**
$\infty + \infty = \infty$ **(2) (Beispiel: gerade Zahlen + ungerade Zahlen).**

Aus (1) => $\infty + n - \infty = \infty - \infty$**, d. h.** $\infty - \infty = n$**,**
aus (2) => $\infty + \infty - \infty = \infty - \infty$**, d. h.** $\infty - \infty = \infty$**,**
also $\infty - \infty$ **kann alles Mögliche sein: „unbestimmter Ausdruck“ (s. u.).**

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Die Menge $\mathbb{Z}$ umfasst die Zahlen ... -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...

Die Folge hat keinen Anfang und kein Ende:
Nun haben wir <u>2 Arten von Unendlich!</u>
<u>Aber:</u>

<u>Mächtigkeit der ganzen Zahlen</u>

Trick:

$\mathbb{Z}$:	**0**	**1**	**-1**	**2**	**-2**	**3**	**-3**	**4**	**-4**	**5**	**-5**	**...**	
$\mathbb{N}$:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**...**	**=>**

Die Elemente von $\mathbb{Z}$ können durchnummeriert werden! D. h. Bijektion zw. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$, also:
Die Menge der ganzen Zahlen hat die <u>gleiche Mächtigkeit wie die der natürl. Zahlen,</u>

Solche Mengen heißen <u>abzählbar unendlich</u>.

<u>Alternierende Reihen</u> (abwechselnd + und -)

Beispiel: Grandi-Reihe (Guido Grandi 1703):

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$$

Summe:

a) $S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + - \ldots \quad = \underline{0}$

b) $S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) - \ldots \quad = \underline{1}$

c) $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots) = 1 - S$

$$S = 1 - S \quad | + S$$
$$2S = 1 \quad | : 2$$
$$\underline{S = ½}$$

d) **Grandi:** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$

Man kann zeigen, dass S jeden erdenklichen Wert annehmen kann.

Dies war für Grandi ein Beweis, wie Gott die Welt aus dem Nichts erschaffen hat.
Aber
Niels H. Abel (1802 - 1829): „Die divergenten Reihen sind eine Erfindung des Teufels.“

<u>Kommentare</u>:

- Beispiel dafür, dass das Unendliche lange Zeit in enger Verbindung von Mathematik und Theologie diskutiert wurde.

- Schlussfolgerungen wie diese haben die Mathematiker sehr verunsichert.

- Das Assoziativgesetz gilt offenbar bei alternierenden Reihen i. Allg. nicht mehr: Die Summe ist nicht eindeutig und hängt vom Verfahren ab, wie man sie berechnet.

- Bei alternierenden Reihen gilt i. Allg. auch das Kommutativgesetz nicht mehr.

- Es gab in fast allen Zeiten der Geschichte des menschlichen Denkens Mathematiker, die ihr Reich von den Unendlichkeiten befreien wollten.

<u>Diophantische Gleichungen</u>

$f(x_i) = 0$, wobei $f(x_i)$ Polynomfunktion mit ganzzahligen Koeffizienten, nur ganzzahlige (nichttriviale) Lösungen gesucht.

Beispiele:

- Pythagoreische Tripel: <u>$a^2 + b^2 = c^2$: unendlich viele Lösungen!</u>

(z. B. $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$ ...)

Aber

- Großer fermatscher Satz ≈ 1640: <u>$a^n + b^n = c^n$, $n > 2$: keine Lösungen</u>!

(Beweis: Andrew Wiles 1994)

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

- Die rationalen Zahlen erweitern den Bereich der ganzen Zahlen:
Sie sind „Brüche“ mit Zähler und Nenner aus jenen.
- <u>Darstellungen:</u> gemeine Brüche, Dezimalbrüche, Kettenbrüche.

<u>Gemeine Brüche</u>

entsprechen nicht ausgeführten Divisionen (außer Division durch 0):
- Unendlich viele mögliche Zähler, unendlich viele mögliche Nenner.
- Unendlich viele Darstellungen des Wertes einer Bruchzahl („Äquivalenzklassen“),
die durch Erweitern und Kürzen ineinander übergeführt werden können.

<u>Dezimalbrüche</u>

haben unendlich viele periodische Nachkommastellen („abbrechend“ heißt Periode 0).
Sie sind also i. Allg. unendliche Darstellungen endlicher Zahlen. Beispiele:
a) $\frac{1}{3}$ = 0,333… = $0{,}\overline{3}$. Man kann die unendlich vielen Dreien nicht alle hinschreiben,
das exakte Ergebnis wäre erst nach unendlich vielen Divisionsschritten erreichbar.
Trotzdem kennt man alle Eigenschaften (z. B. dass die Hälfte davon $\frac{1}{6}$ ist).
b) $\underline{1}$ = 1/1 = 1,000000... = $\underline{1{,}\overline{0}}$ = 9/9 = 1/9 · 9 = 0,111111…· 9 = 0,999999… $\underline{= 0{,}\overline{9}}$. (Also:)
Auch bei der Dezimalbruchdarstellung existieren mehrere gleichwertige Formen.

Darstellung der rationalen Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden:

Die Zahlengerade ist überall „dicht“, d. h. zwischen je zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele andere, z. B. zwischen 1,000 000 000 0 und 1,000 000 000 1 und jedem anderen Intervall (man kann etwa jeweils immer die Mittelwerte bilden).

Wir haben hier wieder eine neue Form der Unendlichkeit!

Kettenbrüche

Ein Kettenbruch ist ein gemischter Bruch der Form a + b/x ,
bei dem der Nenner x wieder die Form eines gemischten Bruchs hat (i. Allg. mehrfach):

$$a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e + \cfrac{f}{\ddots}}} \quad .$$

Alle Teilnenner sind positiv,
a, b, c ... ganzzahlig.[1]

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Besonders wichtig: reguläre Kettenbrüche: →
Alle Zähler haben den Wert 1.

Beide Formen können ineinander übergeführt werden,
deshalb genügt es i. Allg., die regulären Kettenbrüche zu betrachten.

Abgekürzte Schreibweise der regulären Kettenbrüche: $[b_0 ; b_1 , b_2 , b_3 , ...]$.

---

[1] **Der letzte Nenner muss der Eindeutigkeit wegen > 1 sein.**

Reguläre endliche Kettenbrüche

Ein Kettenbruch heißt endlich, wenn er nach einer natürlichen Zahl n >1 abbricht.
Jede rationale Zahl lässt sich in einen endlichen regulären Kettenbruch entwickeln.

Beispiel: 43/30 = 1,433333333… (Trick: Eine Zahl ist gleich 1 / ihren Kehrwert:)

$$\frac{43}{30} = 1 + \frac{13}{30} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{30}{13}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{13}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$$

Abgekürzte Schreibweise: [1; 2, 3, 4].

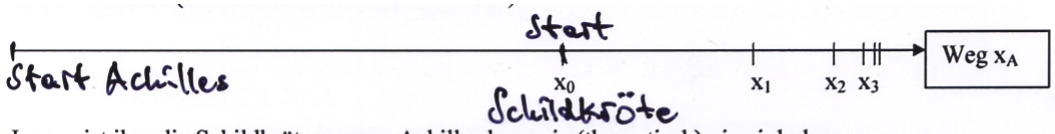
Alle 3 Ausdrücke gleichwertig, Kettenbruch aber viel einfacher als Dezimalbruch.
Es zeigt sich: Das Unendliche verschwindet bei Kettenbrüchen rationaler Zahlen.
Der Kehrwert 30/43 = 0,6976744186 ergibt sich als Kettenbruch zu [1, 2, 3, 4].
Ebenso bei anderen Beispielen gilt:
Die Zahl x und ihr Reziprokes 1/x unterscheiden sich nur durch das Semikolon.
Also anders als in der Dezimalbruchdarstellung lässt die Perspektive des Kettenbruchs den Zusammenhang beider unmittelbar erkennen.

Kleiner Exkurs zu Zenon

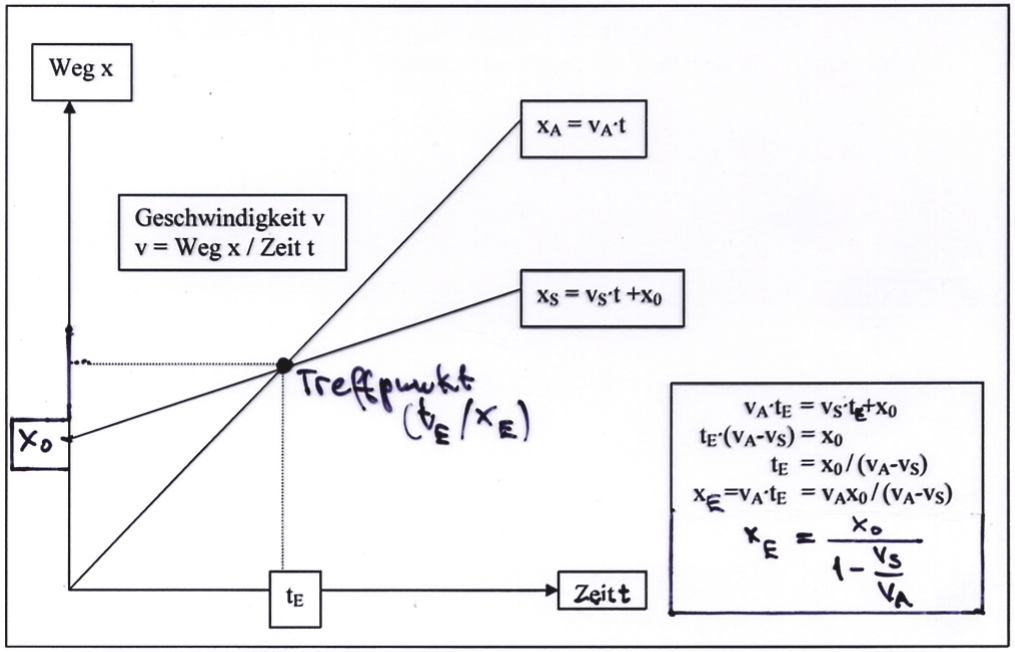
<u>Der Vorsokratiker Zenon von Elea</u> (um 490 v. u. Z. bis um 430 v. u. Z.)

war wohl Schüler von Parmenides, welcher (im Gegensatz zu seinem Zeitgenossen Heraklit) die Existenz jeglicher Bewegung leugnete, sie nur als scheinbar ansah. Zenon wurde vor allem bekannt durch seine <u>Paradoxien</u>. Sie betreffen die Frage, ob die Welt in diskrete Einheiten zerlegbar ist, also ob es Teilbarkeit gibt, oder ob die Welt tatsächlich eine kontinuierliche Einheit bildet. 2 Beispiele:

<u>Achilles und die Schildkröte</u>
ist wohl die bekannteste der Paradoxien des Zenon, die vermeintlich triviale Bewegungsprobleme hinterfragen. Wenn beim Wettlauf mit der Schildkröte Achilles deren Vorsprung eingeholt hat, ist sie ein Stück weiter. Ist Achilles dort eingetroffen, ist sie wieder ein Stück weiter usw., deshalb könne er sie scheinbar nie einholen. Heute lässt sich die Aufgabe mit einfacher Schulmathematik lösen:



Immer ist ihm die Schildkröte voraus, Achilles kann sie (theoretisch) nie einholen.



Beispiel: Vorsprung der Schildkröte 1 (km) und
Achilles läuft 10mal so schnell wie die Schildkröte

Weg des Achilles $= 1 + {}^1/_{10} + {}^1/_{100} + {}^1/_{1000} + {}^1/_{10000} + \ldots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots = 1{,}11111\overline{1}\ldots$ (km).

nach Kasten: $x_E = \frac{1\,km}{1 - 1/10} = \frac{10}{9}\,km = 1{,}\overline{1}\,km.$

Ann.: $v_S = 0{,}5\,km/h \Rightarrow t_E = \frac{1\,km}{5\,km/h - 0{,}5\,km/h} = 13{,}\overline{3}\,min.$

Die Teilwege des Achilles bilden eine <u>unendliche geometrische Reihe:</u> Der Quotient q zweier benachbarter Glieder ist konstant: $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$. Die Zeit t_E konnte Zenon nicht bestimmen, weil der exakte Begriff der Geschwindigkeit damals nicht bekannt war.
Sicher war es Zenon klar, dass der schnelle Läufer die langsame Schildkröte einholt.
Was man damals aber nicht verstehen konnte, ist der <u>scheinbare Widerspruch zur intuitiven Anschauung, dass in einer endlichen Strecke das Unendliche enthalten sein sollte!</u>

<u>Paradoxie vom fliegenden Pfeil:</u> In jedem (sehr kurzen) Augenblick befindet sich der Pfeil an einem bestimmten Ort (vermeintlich) in Ruhe. Deshalb könne er sich nicht bewegen.

<u>Derartige Paradoxien konnten in der griechischen Antike nicht gelöst werden.</u>
Sie weisen auf beunruhigende Eigenschaften des Unendlichen und auf Schwierigkeiten hin, die uns erwarten, wenn wir versuchen, die Bedeutung unendlicher Prozesse und Phänomene zu verstehen. Zenons Paradoxien haben Generationen von Logikern und Mathematikern veranlasst, sich mit ihnen auseinanderzusetzen. *Sie haben den Blick dafür geschärft, dass sich die einleuchtendsten, selbstverständlich scheinenden Annahmen und Aussagen, wenn man ihnen kritisch auf den Grund geht, als zweifelhaft, brüchig, widerspruchsvoll herausstellen können…*
(Hans Joachim Störig)

Wir Heutigen können mit unendlichen Summen gut umgehen und sie berechnen.
Auch andere Paradoxien des Unendlichen haben die Mathematiker mittlerweile verstanden.
Einen großen Anteil daran hat der deutsche Mathematiker Georg Cantor.

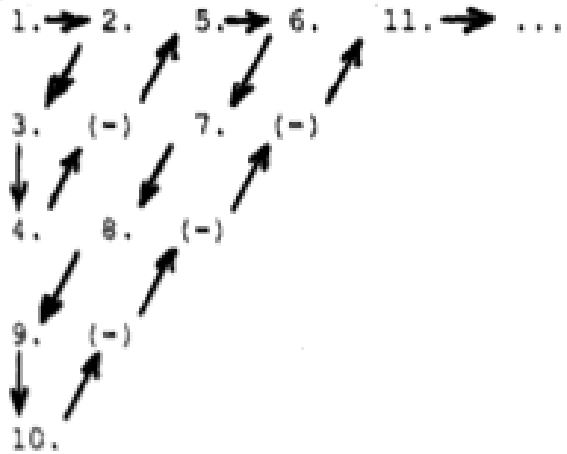
Georg Cantor und sein erstes Diagonalargument

Georg Cantor (1845 - 1918) begründete in den Jahren 1874 bis 1897 die Mengenlehre.

Wie bereits dargestellt sind die ganzen Zahlen mit ihren verschiedenen Untermengen abzählbar. Im Jahr 1874 konnte Cantor durch ein scharfsinniges Argument zeigen, dass auch die rationalen Zahlen abzählbar sind: Dazu zweidimensionale Anordnung:

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...
4/1	4/2	4/3	...		
5/1	5/2	...			
...					

Das Schema wird „diagonal“ durchlaufen (rechts); dabei sind die kürzbaren Brüche (-) zu überspringen, weil bereits in den unkürzbaren Brüchen enthalten: →



Man erkennt, dass sich die Brüche tatsächlich abzählen lassen, erhält also auf diese Weise eine <u>Abzählung (Nummerierung) der positiven rationalen Zahlen</u>:

1	½	2	3	⅓	1/4	⅔	3/2	4	5	1/5	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Kann man auch alle rationalen Zahlen abzählen?
Ja: Gleiches Schema wie eben:

1	½	2	3	⅓	$^1/_4$	⅔	$^3/_2$	4	5	$^1/_5$	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Zusätzlich (wie vorher bei den ganzen Zahlen):
Einfügen der Null sowie nach jeder positiven Zahl die entsprechende Gegenzahl:

0	1	-1	½	-½	2	-2	3	-3	⅓	-⅓	$^1/_4$	-$^1/_4$	⅔	-⅔	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

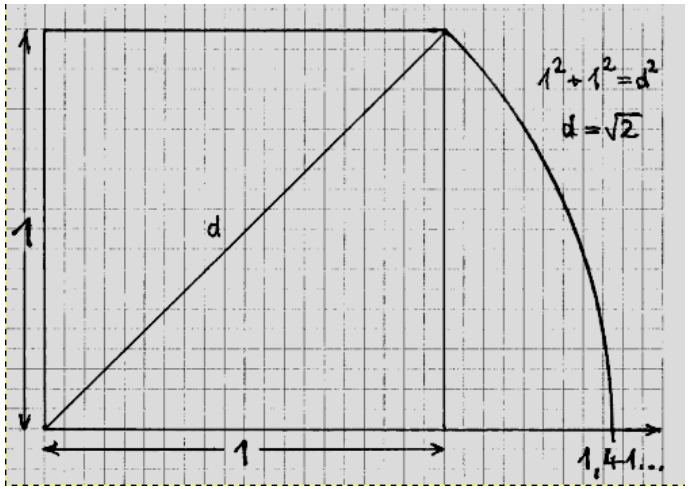
<u>Überraschendes Ergebnis:</u>

<u>Alle rationalen Zahlen sind abzählbar unendlich wie die natürlichen Zahlen</u>,
<u>beide Mengen sind also gleichmächtig,</u>
<u>es gibt „ebenso viele“ rationale wie natürliche Zahlen.</u>

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Obwohl die Zahlengerade in jedem noch so kleinen Intervall unendlich viele rationale Zahlen enthält (sie ist überall dicht), hat sie (bzgl. der rationalen Zahlen) noch Lücken: Zahlen, die man nicht als Bruchzahlen darstellen kann: <u>irrationale Zahlen.</u>

Schon die Pythagoreer entdeckten irrationale Zahlen:
$\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$



<u>Einteilung der reellen Zahlen</u>

- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

- Irrationale Zahlen $\mathbb{I}$

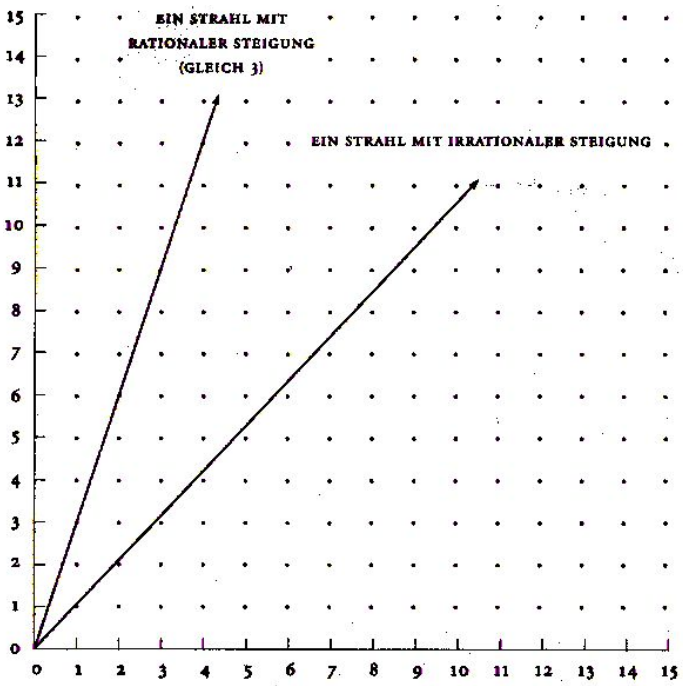
- Algebraische irrationale Zahlen $\mathbb{A}$

algebraische Zahlen: Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten.
Beispiele: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ (Lösungen der Gl. $x^2 - 2 = 0$ bzw. $x^2 - 5 = 0$), Φ (gold. Schnitt, s. u.)

- Transzendente Zahlen $\mathbb{T}$ (sind immer irrational)

alle Zahlen, die nicht algebraisch sind.
Beispiele: π, e.

Unterschiede zwischen rationalen und irrationalen Zahlen



1. Geometrisch veranschaulicht[2]:

Ein Strahl mit rationaler Steigung
trifft ∞ viele Punkte des Punktgitters,
ein Strahl mit irrationaler Steigung
trifft außer (0 , 0)
keinen einzigen Punkt des Punktgitters.

2. Die Dezimalbruchdarstellung
der irrationalen Zahlen besteht aus ∞ vielen Stellen, in denen <u>keine</u> Periode erkennbar ist.
Beispiel: $\sqrt{2}$ = 1,4142135623730950…

3. Kettenbrüche irrationaler Zahlen brechen nicht ab, jede irrationale reelle Zahl lässt sich auf genau eine Weise in einen <u>un</u>endlichen regulären Kettenbruch entwickeln.
Unendliche Kettenbrüche sind stets irrationale Zahlen. =>

Dezimal- und Kettenbruchdarstellungen irrationaler Zahlen sind also unendliche Darstellungen endlicher Zahlen.

---

[2] Abb. aus Aczel, Amir D., Die Natur der Unendlichkeit, S. 95.

Beispiel: Entwicklung der Wurzel von 2 in einen Kettenbruch*:

$$\sqrt{2} = 1+\sqrt{2}-1 = 1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1+\frac{1}{\frac{1\cdot(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)}}$$

$$= 1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{2}}{2-1}} = \underline{1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}\ , \text{ d.h.}$$

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{2} = [1;2,2,2,\ldots] = [1;\overline{2}]}}$$

***) Übergang von 2. zu 3. Zeile: Wiederholte Anwendung des bisherigen Ergebnisses.**

Vergleich: √2 =1,41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85696 71875 37694 …

1. Die Kettenbruchdarstellung ist (bei diesem u. a. Beispielen) viel einfacher.
2. Während die Dezimalbruchentwicklung völlig unregelmäßig ist, erkennen wir hier (wie auch bei den folgenden Zahlen) eine Regelmäßigkeit, die man vorher gar nicht vermuten konnte!

Die eulersche Zahl *e* als weitere wichtige Irrationalzahl

$$e = 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\,47093\,69995\ \ldots$$

Definition: Grenzwert einer Folge: $$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

oder als Reihe: $$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots$$

Als regulärer Kettenbruch, von Leonhard Euler (1707 - 1783) gefunden:

$$e = [2;\ 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \ldots]\ :$$

Es ist ein Muster erkennbar (das sich bis ins Unendliche fortsetzt), jedoch keine Periode.

Von e gibt es eine große Anzahl weiterer interessanter Kettenbruchdarstellungen (reguläre und nichtreguläre) mit Symmetrien, aber nicht periodisch.

Der goldene Schnitt als weitere Irrationalzahl

Zwei reelle Zahlen $a > b > 0$, z. B. die Längen zweier Strecken, stehen genau dann im Verhältnis des goldenen Schnitts Φ , wenn die Gleichung gilt:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi \quad (*)$$

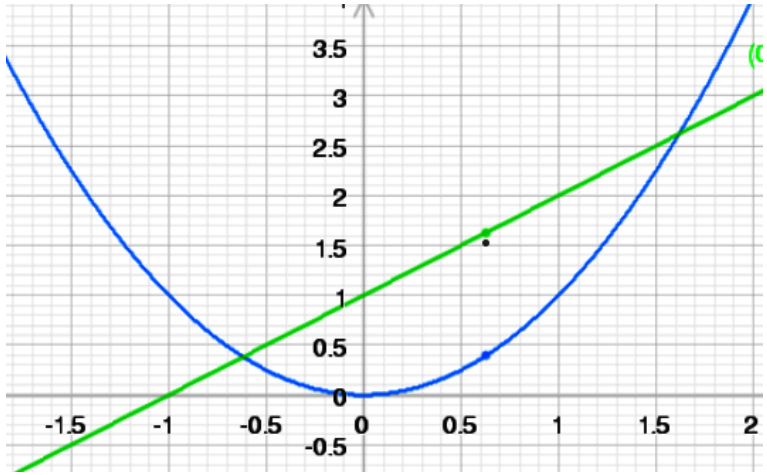
Die größere Zahl verhält sich zur kleineren wie die Summe aus beiden zur größeren.

$\Phi = 1 + 1/\Phi$ (**), $\Phi^2 = \Phi + 1$ (***),
$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.

Die positive Lösung $\Phi = ½ \cdot (1 + \sqrt{5}) \approx 1{,}618\ldots$,
genauer $\Phi \approx 1{,}6180339887498948482\ldots$

Aus (**) => $1/\Phi = \Phi - 1$ und (***):
$1/\Phi$, Φ, Φ^2 haben die gleichen
∞ vielen Nachkommastellen.

Aus (*) =>, wenn $a + b = 1$, $1/a = \Phi$,
$a = 1/\Phi = \Phi - 1 \approx 0{,}618 =$ <u>61,8 %</u>, $b \approx$ <u>38,2 %</u>.



Aus der wiederholten Anwendung von (**) $\Phi = 1 + 1/\Phi$ folgt

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = \cdots = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\cdots}{\cdots + \cfrac{1}{\Phi}}}}}$$

Der unendliche Kettenbruch besteht also nur aus ∞ vielen Einsen, $\Phi = [1; \overline{1}]$.

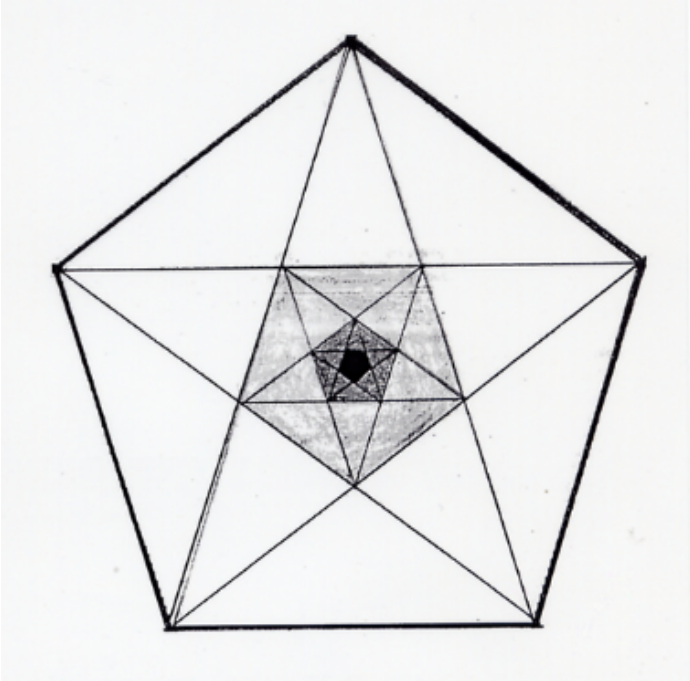
Aus Gleichung (***) $\Phi^2 = \Phi + 1$ folgt $\Phi^2 = 1 + \Phi$, $\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$
und durch wiederholtes Radizieren folgt die unendliche Kettenwurzel

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$ **, auch nur aus ∞ vielen Einsen.**

Am Beispiel des goldenen Schnitts ist also gut erkennbar,
dass sich gewisse Eigenschaften der Zahlen (wie hier Symmetrien)
erst bei geeigneter Darstellung zeigen.

Der goldene Schnitt im regelmäßigen Fünfeck

Vielfach, z. B. als Quotient aus Diagonale und Seite, auch bei sich schneidenden Diagonalen.



Zusammenhang des goldenen Schnitts mit den Fibonacci-Zahlen:

Die unendliche Folge der Fibonacci-Zahlen besteht aus den Anfangsgliedern 0 und 1; alle weiteren Glieder sind die Summe der beiden vorigen Glieder:

f_n: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

Die Verhältnisse zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen (ab 1, 1) nähern sich alternierend dem goldenen Schnitt $\Phi \approx 1{,}618$:

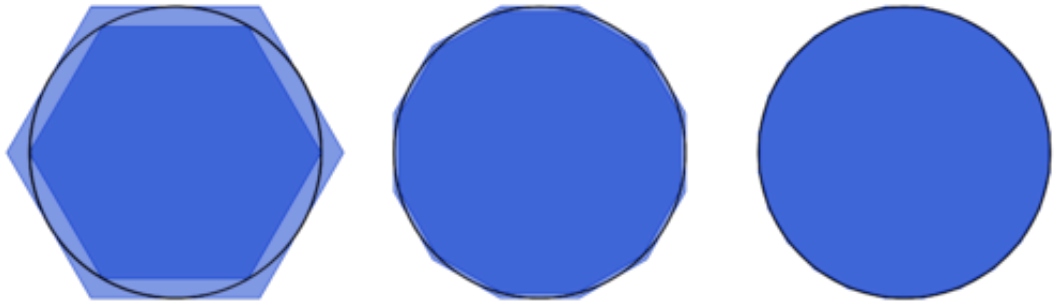
$1 : 1 = 1$, $2 : 1 = 2$, $3 : 2 = 1{,}5$, $5 : 3 \approx 1{,}7$, $8 : 5 = 1{,}6$, $13 : 8 = 1{,}625$ ...

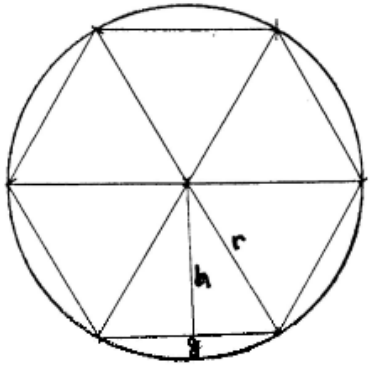
Die Kreiszahl π als weitere wichtige Irrationalzahl

π = 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 ...

Die Kreiszahl π, das Verhältnis von Umfang U zum Durchmesser D = 2r eines Kreises, war schon in sehr früher Zeit praktisch wichtig, z. B.
- für die Berechnung der Länge eines Radbeschlages, der Fläche eines runden Feldes
- für die Berechnung des Rauminhalts eines zylindrischen Speichers.

Archimedes von Syrakus (um 250 v. u. Z.) bewies: $\pi = A/r^2$, A = Kreisfläche.
Er näherte sich mit um- und einbeschriebenen regelmäßigen Vielecken (Polygonen) dem Kreis an (6-Eck bis 96-Eck), um Näherungswerte für A und π zu erhalten:





Fläche eines der gleichschenkligen Dreiecke: $g \cdot h/2$
Fläche des n-seitigen Vielecks: $n \cdot g \cdot h/2$
Exakte Kreisfläche: Vieleck aus unendlich vielen Seiten:
Kreisfläche ($n \to \infty$, => $n \cdot g \to U$, $h \to r$):
$A = \lim n \cdot g \cdot h/2 = U \cdot r/2 = 2\pi r \cdot r/2 = r^2\pi$.

=> Selbst bei der Berechnung einer Kreisfläche braucht man also das Unendliche!

<u>Beweis der Irrationalität von π:</u> Johann Heinrich Lambert 1761 oder 1767.
<u>Beweis der Transzendenz von π:</u> Ferdinand von Lindemann 1882
(D. h. „Quadratur des Kreises“ nicht exakt möglich).

<u>Für π gibt es viele Darstellungen als unendliche Reihen und unendliche Kettenbrüche</u>
z. B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \cdots = \frac{\pi}{4}$$

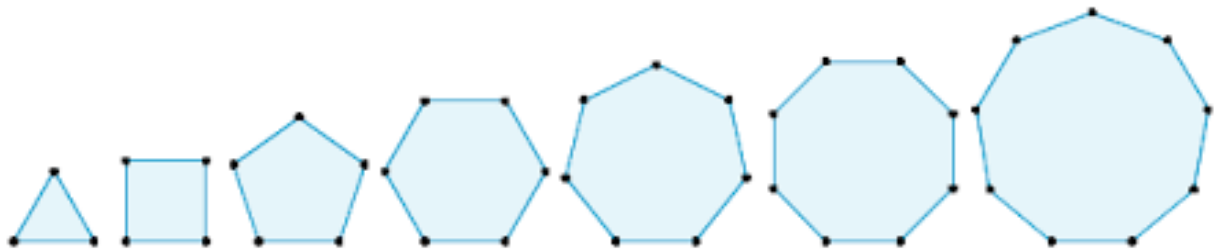
bzw.

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}}$$

<u>Normalität von Pi (wahrscheinlich, aber noch nicht bewiesen).</u>
Eine reelle Zahl heißt normal, wenn in ihren Nachkommastellen jeder Ziffernblock vorkommt und Ziffernblöcke gleicher Länge gleich häufig auftreten.
https://www.angio.net/pi/: The string 050938 occurs at position 92603.
Buchstaben in eine Zahlenfolge kodiert: Man würde ALLE Bücher in Pi finden!

<u>Regelmäßige von Geraden begrenzte geometrische Gebilde</u>

Im 2-Dimensionalen:



<u>Regelmäßige Polygone gibt es unendlich viele</u>.

Im 3-Dimensionalen: (scheinbar reichhaltiger):

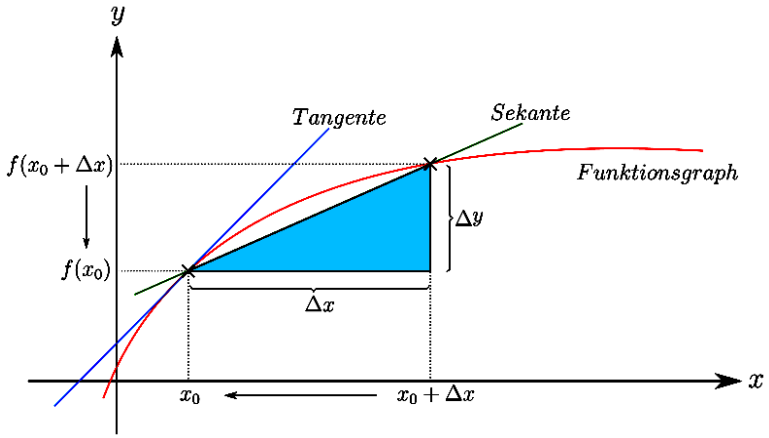
<u>Platonische Polyeder gibt es nur 5!</u>

Infinitesimalrechnung

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), Isaac Newton (1643 - 1727)

Eine Zeitlang zwei Hauptprobleme der Mathematik: Bestimmung
a) der Tangente an eine gegebene Kurve: => Differentialrechnung,
b) der unter einer gegebenen Kurve eingeschlossenen Fläche => Integralrechnung.

Differentialrechnung

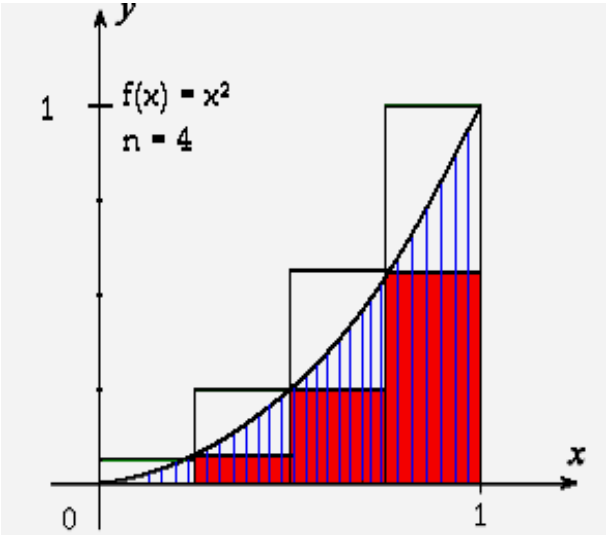


Z. B. Momentangeschwindigkeit:
y = Weg, x = Zeit.

Steigung der Sekante: $\Delta y/\Delta x$.
Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$:
Man führt den anderen Sekanten-Punkt immer näher an den Punkt $(x_0, f(x_0))$ heran.
Dabei gehen sowohl Δy als auch Δx gegen Null (werden ∞ klein, ∞ kleines Steigungsdreieck).
Der Bruch $\Delta y/\Delta x$ bleibt aber in vielen Fällen endlich.

Wenn 0 als Ergebnis eines Grenzübergangs aufgefasst wird, ist der Bruch 0/0 sinnvoll, kann je nach Problem vielerlei bedeuten (sog. unbestimmter Ausdruck, s. u.).

Integralrechnung



Der unter einer gegebenen Kurve eingeschlossene Flächeninhalt kann durch eine Summe vieler schmaler Rechtecke $\Delta x \cdot f(x)$ angenähert werden.
Je feiner die Aufteilung, umso genauer das Ergebnis.

Beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$ geht die Fläche der Rechtecke nach 0, deren Anzahl nach ∞:
Die Summe aus vielen Summanden wird zum bestimmten Integral.

Rein formal haben wir hier $0 \cdot \infty$,
Verbindung (Produkt) des ∞ Kleinen mit dem ∞ Großen:
wieder ein unbestimmter Ausdruck,
aber je nach Problem mit sinnvollem Ergebnis.

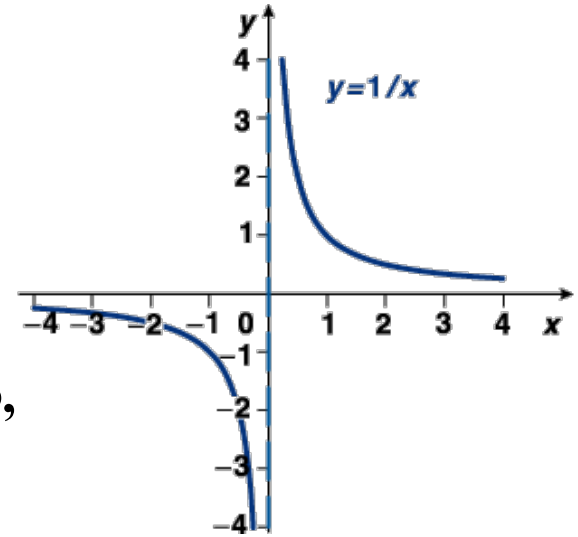
Unbestimmte Ausdrücke

sind $\infty - \infty$, 0/0, $0 \cdot \infty$, ∞/∞ , ∞^0, 1^∞, auch (eingeschränkt) 0^0 .

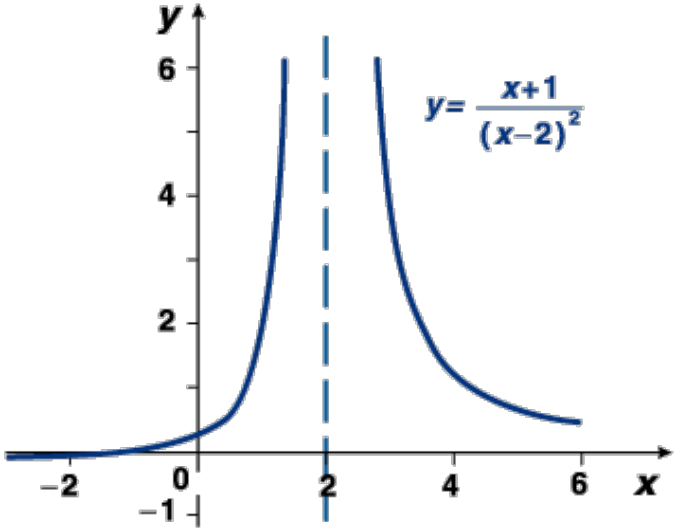
Etwa als Grenzwerte von Funktionen lassen sie sich gewöhnlich durch geeignete Umformungen, Grenzwertsätze bzw. mit der Regel von de l'Hospital eindeutig bestimmen.

An einer Polstelle

wird der Funktionswert $+\infty$ oder $-\infty$; der Graph hat eine Lücke und eine senkrechte Asymptote. Bei ungerader Ordnung der Polstelle springt die Funktion von $+\infty$ nach $-\infty$, (der Graph aus dem positiven in den negativen Bildbereich) oder umgekehrt.



Pol ungerader Ordnung



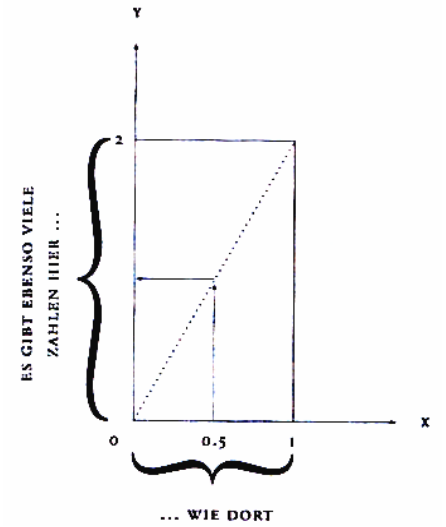
Pol gerader Ordnung

Bolzanos Paradoxie

Bernardus Bolzano (*1781 in Prag; † 1848 in Prag)

Bolzano fragte sich, ob die reellen Zahlen eine ähnliche Eigenschaft erkennen ließen wie diejenige, die Galilei bei den natürlichen Zahlen entdeckt hatte.

Er betrachtete die beiden Intervalle[3] zwischen 0 und 1 und zwischen 0 und 2:



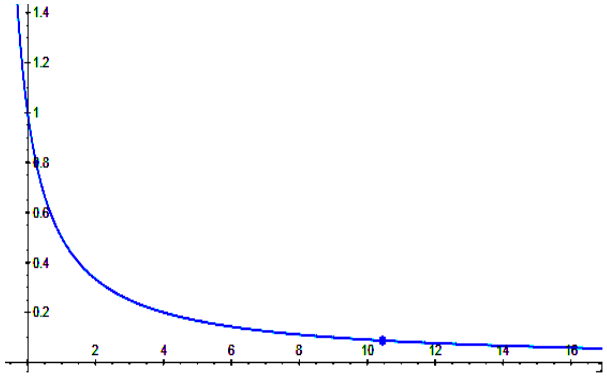
Jeder reellen Zahl zwischen 0 und 1
wird ein Partner zwischen 0 und 2 zugewiesen: $y = 2x$.
Beide Zahlenmengen sind unendlich.
Bolzano schloss: Es gibt ebenso viele Zahlen
zwischen 0 und 1 wie zwischen 0 und 2,
obwohl das zweite Intervall 2mal so lang wie das erste.

Verallgemeinerungen:
- **Beliebige monotone Funktionen (z. B. $y = 78x$),**
- **Der Argumentbereich muss nicht 0 bis 1 sein. =>**

Jedes abgeschlossene Intervall
besitzt ebenso viele Zahlen wie jedes andere abgeschlossene Intervall.

[3] Abb. aus Aczel, Amir D., Die Natur der Unendlichkeit, S. 68.

Bolzanos Paradoxie, Forts.



Drastisches Beispiel:
Zuordnung von y zu 1/(x + 1) :
Die Menge aller positiven reellen Zahlen
im Intervall {x | 0 < x < ∞ }
wird bijektiv auf das kleine Intervall
{y | 0 < y < 1} abgebildet.

Das Prinzip „*Das Ganze ist größer als sein Teil*“ (Aristoteles, Euklid)
gilt nicht bei unendlichen Mengen!

Ähnlich wie beim Paradoxon von Galilei konnte sich Bolzano nicht zu der klaren Aussage durchringen, dass die beiden Mengen „gleich“ seien.
Bolzano schlug aber vor, in der Möglichkeit solcher Zuordnungen geradezu das Charakteristikum unendlicher Mengen zu sehen - wie später Dedekind präzisierte, s. o.

„Ungeachtet einiger [früherer] zaghafter Versuche … war es Bolzano und kein anderer, der als Erster den Weg zu unserer modernen Vorstellung vom mathematischen Unendlichen geebnet hat.“ Jean-Paul Delahaye

Das zweite Cantorsche Diagonalargument

Cantor untersuchte längere Zeit die Frage, ob sich auch die reellen Zahlen abzählen lassen, und fand auf 2 verschiedene Arten (1874 und 1877) die Antwort.
Sein prinzipieller Gedankengang von 1877 sei an einem Beispiel gezeigt:

Er betrachtete zunächst das Einheitsintervall $\{x \mid 0 < x < 1\}$ mit der Annahme:
Alle reellen Zahlen in diesem Intervall lassen sich den natürlichen Zahlen zuordnen, d. h., es wäre eine Zuordnungsliste möglich wie in Cantors erstem Diagonalverfahren:

$$x_1 = 0,\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ \ldots$$
$$x_2 = 0,\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ldots$$
$$x_3 = 0,\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ \ldots$$
$$x_4 = 0,\ 0\ 9\ 0\ 9\ 9\ 0\ 9\ 9\ \ldots$$
$$\ldots$$
$$x_n = 0,\ x_{n1}\ x_{n2}\ x_{n3}\ x_{n4}\ x_{n5}\ x_{n6}\ x_{n7}\ x_{n8}\ \ldots$$
$$\ldots$$

Nun Konstruktion einer reellen Zahl b nach folgender Vorschrift:

$$b = 0,\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8\ \ldots, \quad \text{wobei} \quad b_i = 9 \text{ für } x_{nn} = 0, \text{ aber } b_i = 0 \text{ für } x_{nn} \neq 0.$$

Im Beispiel also $b = 0{,}0900\ldots$.

Die neue Zahl b kann nicht in der Liste enthalten sein, denn sie unterscheidet sich von jeder Zahl in der Liste dadurch, dass es in ihr mindestens eine Dezimalstelle gibt, die nicht in der Zahl der Liste enthalten ist. (Sie unterscheidet sich von der ersten Zahl mindestens in der ersten Dezimalstelle, von der zweiten in der zweiten Dezimalstelle usw.)

Wir haben die Annahme, die Liste enthalte alle reellen Zahlen im Einheitsintervall, folglich zu einem Widerspruch geführt, also gezeigt:
Zwischen den Zahlen 0 und 1 existieren mehr reelle Zahlen als es natürliche gibt.

<u>Verallgemeinerung:</u> Man kann zeigen, dass nicht nur die unendlich vielen Zahlen im Intervall von 0 bis 1, sondern alle reellen Zahlen nicht mehr abzählbar sind:
„überabzählbar“.
Überabzählbar sind auch unendlich viele Teilmengen von $\mathbb{R}$, z. B. beliebige Intervalle.

<u>Die Menge der reellen Zahlen ist größer als die Menge aller rationalen Zahlen.</u>
<u>Dies ist eine höhere Art der Unendlichkeit!</u>

Anders gesagt: Wird jeder irrationalen Zahl eine natürliche Zahl zugeordnet, gibt es noch immer unendlich viele irrationale Zahlen, die keiner natürlichen Zahl zugeordnet sind.

In der Mengenlehre nennt man jede Menge,
die die Mächtigkeit der reellen Zahlen hat, *Kontinuum*.

Cantor hat weiter gezeigt,
dass die Menge der algebraischen Zahlen noch abzählbar ist.

D. h., die transzendenten Irrationalzahlen sind nicht abzählbar:
Ihre Ordnung des Unendlichen, ihre Mächtigkeit,
ist höher als die Mächtigkeit der rationalen und algebraischen Zahlen.
Wieviel höher, konnte Cantor allerdings nicht angeben, s. u.

Georg Cantor, Teil 3

Die natürlichen Zahlen sind uns mit intuitiver Sicherheit gegeben, sie existieren für uns.

Diese Sicherheit fehlt uns bei den irrationalen Zahlen, denn niemand hat die vollständige Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$, π u. ä. wirklich gesehen. Für Irrationalzahlen gibt es zwar Verfahren, sie näherungsweise zu ermitteln, und die Mathematiker konnten gut mit $\sqrt{2}$ oder π rechnen. Bis zur Zeit Cantors wusste man aber nicht, was $\sqrt{2}$ oder π eigentlich darstellen, denn das Ausrechnen der unendlich vielen Nachkommastellen wäre ja ein unendlich langer Prozess, daher *potenzielles Unendlich*. Man war der Auffassung, dass die Ziffernfolge bei der Dezimalbruchentwicklung der Reihe nach erst *geschaffen* wird.

Jedoch Cantor: Es gibt von vornherein unabhängig von etwaigen Näherungsrechnungen die unendlichen Dezimalzahlen $\sqrt{2}$, π usw., und die gesamte Folge von Nachkommastellen ist ein für alle Male vorgegeben (*aktuales Unendlich*). Die Ziffernfolge wird lediglich wieder herausgesucht, gefunden, *ent-deckt*.

Kommentare:

1) Beispiel eines prinzipiellen mathematik-philosophischen Problems:
Ist die Mathematik eine Erfindung oder eine Entdeckung?
Mario Livio (*1945, israelischer Astrophysiker) : Sie ist beides,
s. sein Buch *Ist Gott ein Mathematiker?*, dtv 2014, Kap. 9.
2) Noch heute sind Mathematiker über das Unendliche unterschiedlicher Meinung:
https://de.wikipedia.org/wiki/Potentielle_und_aktuale_Unendlichkeit.

Georg Cantor, Teil 4

Cantor bezeichnete die Mächtigkeit der unendlichen Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{A}$
mit $\aleph_0$, Aleph-null (*Aleph*: erster Buchstabe des hebräischen Alphabets),
es ist die „kleinste“ Unendlichkeit.

Satz von Cantor:
Auch bei unendlichen Mengen sind
ihre Potenzmengen mächtiger als die Mengen selbst.

Cantor fand eine Leiter von immer mächtigeren Unendlichkeiten: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, …

Die Kontinuumshypothese

Cantor vermutete 1878:

Die Mächtigkeit des Kontinuums sei $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$,
also gleich der Mächtigkeit der Potenzmenge von $\aleph_0$,
d. h. es gäbe keine Menge, deren Mächtigkeit *zwischen* der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen und der Mächtigkeit der reellen Zahlen liegt.

In Hilberts berühmter Liste von 23 mathematischen Problemen (Paris 1900) steht die Kontinuumshypothese an erster Stelle.

Cantor versuchte diese seine Hypothese zu beweisen oder zu widerlegen: Er kam wiederholt zu unterschiedlichen Ergebnissen.

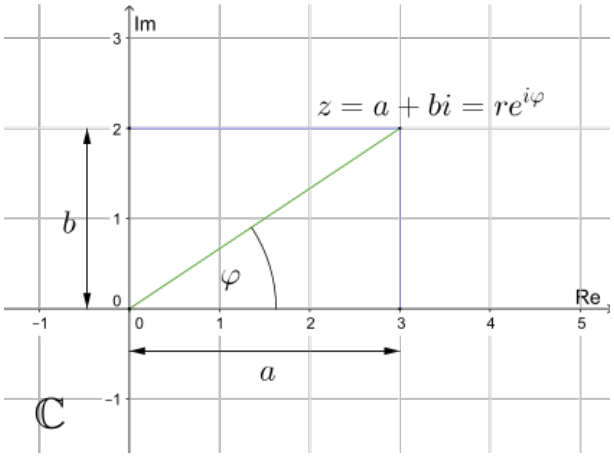
Nach Cantors Tod wurde bewiesen,
dass sie im Rahmen der jetzigen Mathematik unentscheidbar ist:
Kurt Gödel (1938): Die Kontinuumshypothese lässt sich nicht *widerlegen.*
Paul Cohen (1960er): Sie lässt sich nicht *beweisen.* (1966 Fields-Medaille.)
Damit ist sie das erste relevante Beispiel für Gödels 1. Unvollständigkeitssatz.

Aug. 2019: Martin Goldstern, Jakob Kellner (Wien) und Saharon Shelah (Jerusalem):
Es gibt noch 8 weitere Unendlichkeiten, die mindestens $\aleph_1$ und höchstens $2^{\aleph_0}$ sind.

Komplexe Zahlen ℂ

Erweiterung der reellen Zahlen, um auch Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ lösen zu können.
Hier wird $\sqrt{-1}$ als Rechenzahl betrachtet, mit Symbol i bezeichnet.
Dadurch bleiben alle bisherigen Rechenregeln erhalten,
gleichartige Aufgaben haben gleichartige Lösungen,
alle bisher betrachteten Zahlenmengen sind in der erweiterten Menge ℂ enthalten.

Allgemeine Form der komplexen Zahlen: $z = a + i \cdot b$, wobei a und b reelle Zahlen sind, a Realteil und b (oder $i \cdot b$) Imaginärteil. Sie können nicht mehr auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden, aber in der 2-dimensionalen gaußschen Zahlenebene oder auf der (ebenfalls 2-dimensionalen) riemannschen Zahlenkugel:



<u>Gaußsche Zahlenebene:</u>

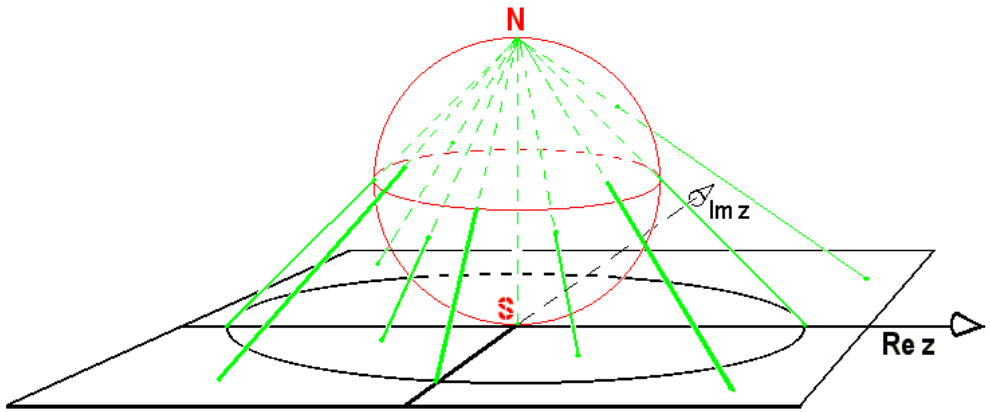
$r = |z|$, $r^2 = a^2 + b^2$,
$a = r \cdot \cos\varphi$, $b = r \cdot \sin\varphi$.
(Eulersche Formel:
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ =>)
$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

<u>∞ viele Richtungen</u>
(∞ viele Zahlengeraden)
<u>mit jeweils</u>
<u>∞ vielen Beträgen:</u>
<u>∞ · ∞ .</u>

<u>Riemannsche Zahlenkugel</u>[4]:

(Bernhard Riemann 1826 - 1866)

Die komplexen Zahlen werden aus der gaußschen Zahlenebene stereographisch auf die Oberfläche einer Kugel projiziert.



Jedem Punkt der Ebene (also jeder komplexen Zahl) entspricht ein Punkt auf der Kugeloberfläche (Kompaktifizierung der Ebene).
Riemann hatte damit das Prinzip von Bolzano auf die komplexen Zahlen erweitert.
Es ergibt sich interessanterweise der „Nordpol“ als stetiges Bild aller unendlich fernen Punkte der Ebene.
So gesehen existiert vom Standpunkt der komplexen Zahlen <u>nur eine „Zahl“ ∞</u> .

<u>Andererseits: Periodizität der e-Funktion:</u>
Der eulerschen Formel zufolge ist die e-Funktion im Komplexen periodisch, was u. a. bedeutet: Es existieren <u>für den Logarithmus unendlich viele Lösungen</u>:

$$\ln z = \ln |z| + i\cdot(\varphi + 2k\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

[4] http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/#816b1d.

Gebrochene Dimensionen: Kurzer Einblick in die fraktale Geometrie

Erweiterung der euklidischen Geometrie, begründet 1975 durch Benoît Mandelbrot.

Es gibt bis jetzt noch keine umfassende Definition von Fraktalen.[5] Aber:

Hinreichende Bedingungen: Eine Struktur ist ein Fraktal,
wenn sie a) selbstähnlich ist oder/und b) eine gebrochene Dimension hat.
(Es gibt auch nicht-selbstähnliche Fraktale und Fraktale mit ganzzahliger Dimension.)

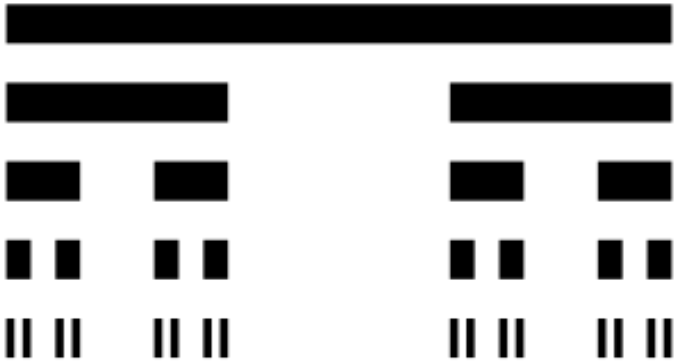
a) Selbstähnlichkeit einer Struktur
liegt dann vor, wenn disjunkte Teile von ihr verkleinerte Kopien des Ganzen sind.
D. h., vergrößert man ein Fraktal um einen bestimmten Vergrößerungsfaktor, entsteht ein Objekt, das aus disjunkten Teilen besteht, die exakte Kopien des ursprünglichen Fraktals sind.

b) (Selbst-)Ähnlichkeitsdimension D:

$$D = \log(\text{Anzahl der Teile}) / \log(\text{Vergrößerungsfaktor})$$

[5] http://www.math.uni-bremen.de/didaktik/ma/ralbers/Veranstaltungen/MaDenken1313/Material/Dim_Skript_K2a.pdf.

Beispiel 1: Georg Cantor, Teil 5: Die Cantor-Menge (Cantor-Staub), 1883



Cantor gehört nach Bolzano und neben Weierstraß zu den ersten Mathematikern, die sich mit Fraktalen befasst haben.

Konstruktion der Cantor-Menge:
Aus dem abgeschlossenen Intervall der reellen Zahlen von 0 bis 1 entfernt man das offene mittlere Drittel, d. h. alle Zahlen zwischen 1/3 und 2/3. Aus den beiden übrig gebliebenen Intervallen wird wiederum jeweils das mittlere Drittel entfernt. Dieses „Wegwischen“ wird unendlich oft wiederholt. Die übrig bleibenden Intervalle werden dabei immer mehr, aber immer kleiner - im Grenzfall zu unendlich vielen Punkten -, ihre Gesamtlänge geht indes nach Null. Da die entstehende Figur komplett aus verkleinerten Kopien von sich selbst zusammengesetzt werden kann, ist sie exakt selbstähnlich. Sie erweist sich als total unzusammenhängend („cantorsches Diskontinuum“), ist nirgends dicht und hat die Mächtigkeit der reellen Zahlen. Weil in jedem Konstruktionsschritt 2 um den Faktor 3 kleinere Kopien der Menge erzeugt werden, beträgt ihre

Ähnlichkeitsdimension D = log 2 / log 3 = 0,6309…, also

zwischen den Dimensionen der Punkte (= 0) und der ursprünglichen Strecke (= 1).

<u>Beispiel 2: Sierpinski-Dreieck</u> (Wacław Sierpiński, 1882 - 1969)

Initiatorfigur: Dreieck, aus dem man ein mittleres kleines Dreieck herausschneidet. Diese Prozedur wird für die neu entstehenden Dreiecke unendlich oft wiederholt.

Bei jedem Schritt

verringert sich <u>die Gesamtfläche, die im Grenzfall nach Null geht.</u>
Die Anzahl der Teildreiecke und damit
<u>der Umfang</u> (Gesamtlänge der Konturen) <u>wird dagegen unendlich</u>.

Die Ähnlichkeitsdimension beträgt D = log 3 / log 2 = 1,585…,
<u>die entstehende Grenzfigur ist also weder Fläche (D = 2) noch Linie (D = 1).</u>

Wie die Beispiele illustrieren, zeigen Fraktale wieder eine neue Art von Unendlichkeit.

Georg Cantor, Teil 6: Höhere Dimensionen

Aus Cantors bisheriger Forschung ergab sich die Frage,
ob es mehr Punkte in der Ebene als auf der Geraden gäbe.

Wieder ohne Verlust der Allgemeinheit
kann man sich auf das Intervall zwischen 0 und 1 beschränken:

Jeder Punkt des Einheitsquadrats ist durch das Koordinatenpaar (a , b) darstellbar,
mit $a = 0{,}a_1a_2a_3a_4 \ldots$ und $b = 0{,}b_1b_2b_3b_4 \ldots$

Cantor fand folgende Transformation vom Quadrat auf die Strecke:

$$0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\ldots$$

(Wechsel zwischen den Dezimalbruchziffern der beiden Koordinaten).
Damit hat jeder Punkt des Quadrats eine Entsprechung auf der Zahlengeraden.

Cantor schloss daraus:
Es gibt ebenso viele Punkte auf der Ebene wie auf der Geraden.

Ähnliche Argumente führten Cantor zur Einsicht:

Die Zahl der Punkte auf der Zahlengeraden
ist gleich der Zahl der Punkte im 2-, 3-, 4- und höherdimensionalen Raum.

Anders ausgedrückt:

Jeder kontinuierliche Raum, von der eindimensionalen Geraden
bis zum n-dimensionalen Raum, hat ebenso viele Punkte wie das Kontinuum $\mathbb{R}$.

Beispiel:

Ein Würfel enthält ebenso viele Punkte wie eine seiner Kanten.

Damit ist ein verblüffendes und völlig unerwartetes Ergebnis gewonnen.
Cantor war bestürzt:

„Ich sehe es, aber ich glaube es nicht“, schrieb er an seinen Freund Dedekind.

Einige Würdigungen Georg Cantors

Georg Cantor hatte ein schwieriges Leben, z. T. wegen fachlicher Kontroversen mit maßgebenden Kollegen. Sein reichhaltiges mathematisches Lebenswerk war gleichwohl

bahnbrechend für die Fundierung der heutigen Mathematik.

Edmund Landau (deutscher Mathematiker, 1877 - 1938) über Georg Cantor:

„Er gehörte zu den größten und genialsten Mathematikern aller Länder und aller Zeiten, aus dessen Werken die spätesten Generationen lernen werden.“

David Hilbert :

„Niemand wird uns wieder aus dem Paradies vertreiben, das Georg Cantor für uns eröffnet hat.“

****

Zur Unendlichkeit des Weltalls[6]

Vier denkbare Möglichkeiten zur räumlichen Unendlichkeit:

- Das Weltall ist unendlich,
- das Weltall ist nicht unendlich,
- es gibt eine dialektische Einheit von Endlichkeit und Unendlichkeit,
- es ist falsch, beide Begriffe auf das Weltall anzuwenden.

Eine dieser Möglichkeiten muss richtig sein, aber keine kann man sich vorstellen.

Erklärung Immanuel Kants (1724 - 1804):

„Die menschliche Vernunft hat das besondere Schicksal …,
dass sie durch Fragen belästigt wird, die sie nicht abweisen kann;
denn sie sind ihr durch die Natur der Vernunft selbst aufgegeben,
die sie aber auch nicht beantworten kann,
denn sie übersteigen alles Vermögen der menschlichen Vernunft.“

***Kritik der reinen Vernunft* 1. Auflage, Vorrede**

[6] Die Begriffe Welt, Weltall, Weltraum und Universum werden hier synonym verwendet.

Erklärung (frei) nach Ludwig Boltzmann (österr. Physiker u. Philosoph, 1844 - 1906):

„Der Trieb zu philosophieren scheint uns unausrottbar angeboren zu sein.“
Unsere „Denkgesetze haben sich nach den Gesetzen der Evolution … behufs Erfassung des zum Lebensunterhalt Notwendigen, des praktisch Nützlichen herausgebildet.“
Aber wie beim Saugen des Kleinkinds „am leeren Kautschuk … schießen auch die Denkgesetze oft über das Ziel hinaus“, wie etwa beim Philosophieren.[7]
Es bestand evolutionär keine Notwendigkeit, über Unendlichkeit nachzudenken.

Èmile Borel (französischer Mathematiker, 1871 - 1956):

„Wer weiß, ob das gesamte sichtbare Universum nicht nur wie ein Wassertropfen auf der Erdoberfläche ist? Die Bewohner dieses Wassertropfens … könnten sich nicht vorstellen, dass sich außerhalb des Tropfens ein Stück Eisen oder lebendes Gewebe befinden, in denen die Materieeigenschaften völlig anderer Natur sind.“[8]

---

[7] Engelbert Broda, Ludwig Boltzmann – Mensch, Physiker, Philosoph, Dt. Verl. d. Wiss: Bln. 1957, S. 101, 125, 129.
[8] Zit. n. John Barrow, Einmal Unendlichkeit und zurück, rororo-TB, S. 146.

<u>Einige Aussagen sind dennoch möglich:</u>

1. Wäre das Weltall unendlich ausgedehnt und bestünde es schon unendlich lange,
ergäben sich Widersprüche zu unserer Erfahrung:
die 3 klassischen Paradoxa der Kosmologie.
2. Wissenschaftliche Prognosen über ferne Zeiten,
entsprechend dem jetzigen Wissensstand.

Exkurs: Die Weltbilder von Kopernikus, Kepler und Newton

<u>Nikolaus Kopernikus (1473 - 1543) und Johannes Kepler (1571 - 1630)</u>

Planeten einschließlich der Erde drehen sich um die Sonne.
Die Sonne ist der Mittelpunkt der Welt. Das Weltall ist begrenzt.

<u>Das Weltall Isaac Newtons (1643 - 1727):</u>

- wurde einst von Gott geschaffen,
- von da an zeitlich unendlich (also nur in einer Richtung), statisch,
- unendlich im absoluten euklidischen Raum,
- (aufgrund des Gravitationsgesetzes) gleichmäßig mit Materie erfüllt:
unendlich viele Sterne von durchschnittlich gleicher Helligkeit.

Die 3 klassischen Paradoxa der Kosmologie in heutigem Licht

1. Photometrisches Paradoxon, olberssches Paradoxon (Kepler, Olbers 1823)

Der Nachthimmel müsste bei unendlich vielen Sternen taghell sein, denn man träfe in jeder Blickrichtung auf einen Stern.

Warum ist es nachts dunkel? Heutige Antwort:

- Die Sterne mit hoher Leuchtkraft sind weit genug von uns entfernt.
Wäre Rigel (ca. 770 Lj) so nahe wie Sirius (8,6 Lj), wäre der Nachthimmel hell.
- Licht mit seiner endlichen Geschwindigkeit von 300 000 km/s
kann uns in der endlichen Zeit, seitdem das Universum existiert (13,8 Mrd. a), nur aus einem endlich großen Bereich erreichen, in dem sich nur endlich viele Sterne entwickelt haben, deren Lebensdauer zudem endlich ist.
- Viele Arten von Strahlungen des Weltraums sind für uns unsichtbar
(Infrarot, Ultraviolett, Mikrowellen, Röntgenstrahlung, Gammastrahlung, kosmische Höhenstrahlung, Neutrinos).
- Insbes. führt die Expansion des Universums zur Verschiebung der Wellenlängen des Lichts ferner Galaxien und der kosmischen Hintergrundstrahlung ins Unsichtbare.
- Interstellare Dunkelwolken reduzieren die Helligkeit von dahinter liegenden Sternen.

<u>Eine subtilere Betrachtung von Rainer Göhring</u>[9] ergibt:

„Es genügen einzig und alleine zwei Grundannahmen:
1. Das Licht hat eine endliche Geschwindigkeit und
2. das Universum hat entweder ein endliches Alter
oder die Sterne haben eine endliche Lebensdauer.
Der Nachthimmel ist demnach genau dann dunkel, wenn
- die mittlere Entfernung der Sterne so groß ist, dass die Lichtlaufzeit
zur Sichtbarkeitsgrenze größer ist als das Alter des Universums
oder die Lebensdauer der Sterne (welche von beiden auch immer kleiner ist)
- oder (mit der Betrachtung der im Universum enthaltenen Energie:)
Es gibt zu wenig Energie im Universum, um den Nachthimmel aufzuhellen.“

[9] https://web.archive.org/web/20120522121308/http://philoscience.unibe.ch/documents/TexteHS09/OlbersschesParadoxon_Goehring.pdf.

2. Thermodynamisches Paradoxon, „Wärmetod“, William Thomson (Lord Kelvin), ≈ 1851

Alle Energiequellen müssten längst erschöpft sein.

Heutige Antwort: Das Weltall ist noch jung genug.

3. Gravitationsparadoxon, Hugo von Seeliger, Carl Neumann, 1895

In einem unendlich ausgedehnten Weltall mit unendlich vielen Sternen können keine stabilen Systeme (z. B. unser Sonnensystem) existieren, weil aus je 2 entgegengesetzten Richtungen unendlich große Zerrkräfte ziehen.

Heutige Antwort: Die Sterndichten in den Galaxien sind sehr niedrig (nächster Stern Proxima Centauri 4,2 Lj = $43 \cdot 10^{12}$ km).

Historische Ergänzungen

- <u>Die wissenschaftliche Kosmologie</u> beruht

1. auf Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie (ART) von 1915

2. auf astronomischen Beobachtungen ab 1912

mit im Laufe der Jahrzehnte immer besseren Teleskopen und Methoden.

- 1922-1924: Alexander Friedmann: Nach der ART kann das Universum nicht stationär sein, sondern muss entweder expandieren oder kontrahieren. Das Universum kann sphärisch, flach oder hyperbolisch sein (Winkelsumme im Dreieck größer, gleich oder kleiner als 180 Grad), hängt von der mittleren Materiedichte ab.

- 1927: Georges Lemaître (1894 - 1966) entdeckte die Expansion des Weltalls: „wie Mikroben auf einer Seifenblase“, wenn man sie weiter aufbläst.

- 1931: Lemaître: gedanklich die Expansion rückwärts: Entdeckung des „Urknalls“.

- 1932/33 Jan Hendrik Oort und Fritz Zwicky postulieren eine „dunkle Materie“.

- 1964: Arno Penzias und Robert W. Wilson entdeckten die kosmische Hintergrundstrahlung (Bestätigung der Urknall-Theorie).

- 1998 Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt und Adam Riess beobachteten, dass sich die Ausdehnung des Universums beschleunigt: „dunkle Energie“.

Jetziger Erkenntnisstand

- Das Universum ist wahrscheinlich flach (Raumsonde *WMAP*, Messunsicherheit 2 %, wegen dieser Unsicherheit könnte es auch sphärisch oder hyperbolisch sein). Jetziger Durchmesser ≥ 78 Mrd. Lj., Volumen kann endlich oder unendlich sein.

- Bei großem Anteil der (gegenwärtig noch nicht verstandenen) dunklen Energie beschleunigt sich ein flaches Universum immer weiter, stürzt ein sphärisches Universum nicht in sich zusammen.

- Bei bestimmten Formen der dunklen Energie könnte die Expansionsrate größer als die Lichtgeschwindigkeit werden: „Big Rip“:

das Universum würde auseinandergerissen, keine Wechselwirkung zwischen Teilchen mehr möglich.

Prognosen für fernere Zeiten: das gegenwärtig wahrscheinliche Szenario

<u>Nur noch etwa 500 Millionen Jahre</u> wird die Erde so wie heute bewohnbar sein.
Die Leuchtkraft der Sonne nimmt mit der Zeit zu => Temperatur auf der Erdoberfläche steigt. => allmähliches Austrocknen der Ozeane.

Schon vorher müsste mit der <u>Kolonisierung der Galaxis</u> begonnen werden.

<u>In wenigen Milliarden Jahren:</u>
Verschmelzung unserer Galaxis mit der Großen Magellanschen Wolke.
Danach verschmilzt die nun größere Galaxis mit der Andromeda-Galaxie: <u>*Milkomeda*</u>:
Vorher füllt die Andromeda-Galaxie fast den ganzen Himmel aus.
→ größere elliptische Galaxie, diese bildet mit einigen weiteren eine Supergalaxie.

<u>In 7,6 Milliarden Jahren:</u>
1) Ende der Erde, sie stürzt in die aufgeblähte, sterbende Sonne.
2) Die Sonne (heute ein gelber Zwergstern) beginnt (im Alter von ≈ 12,2 Mrd. Jahren) abzukühlen und zu schrumpfen, wird schließlich zu einem weißen Zwergstern: leuchtet über die Jahrmilliarden immer schwächer.

(Mit der Sonne als weißem Zwerg würde es auf der Erde zu kalt sein.)

Trotz möglichen Weiterlebens unserer fernen Nachkommen in anderen Sternsystemen nur vorübergehendes Überleben, denn ein ähnliches Schicksal wie die Sonne erleiden alle Sterne im ganzen Universum.

Die Stern-Entstehungsrate verringert sich im Laufe der Jahrmilliarden immer mehr, bis keine neuen Sterne mehr entstehen. Am langlebigsten sind rote Zwergsterne, die Lebensbedingungen auf deren Planeten wären aber sehr ungünstig.

Die beschleunigte Expansion des Kosmos wird sich weiter fortsetzen.

In etwa 100 Bill. Jahren können sich keine neuen Sterne mehr bilden.

In 10^{37} - 10^{39} Jahren:
Gemäß der Grand Unified Theory zerfallen alle Protonen und Neutronen, auch die im Atomkern gebundenen => die gesamte uns vertraute Materie wird vernichtet.

Später zerstrahlen schließlich auch alle schwarzen Löcher.

<u>Nach 10^{100} Jahren:</u>
Sämtliche Strukturen werden verschwunden sein,
es gibt dann nur noch
extrem kalte Strahlung und leichte Elementarteilchen in äußerst geringer Dichte,
es können keine Vorgänge mehr stattfinden.

Somit ist dann nicht nur der <u>Raum inhaltsleer</u> geworden und alle Materie zerfallen, sondern
<u>auch die Zeit hat</u> ihre grundlegenden Eigenschaften Kausalität, Richtung und Dauer verloren und <u>sich damit ins Nichts aufgelöst.</u>

****