

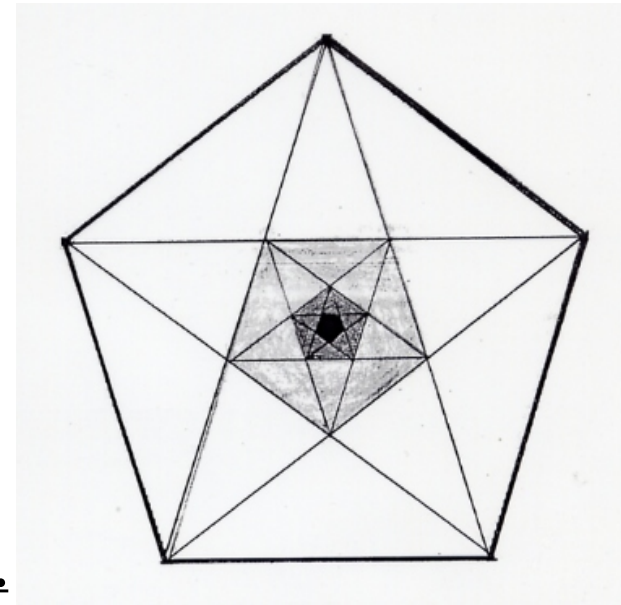


Karl-Peter Dostal,

Einige Streifzüge in die Unendlichkeit

Mathematisches Basiswissen über das unendlich Große und unendlich Kleine,

- geordnet nach den Zahlbereichen,
- einige sehr große Zahlen,
- einiges Historische und Philosophische,
- kaum Theologisches,
- ausgewählte Zitate.



Betrachtungen zur Unendlichkeit des Weltalls.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\infty - \infty = n \text{ oder } \infty - \infty = \infty?$$

„Alles ist Zahl“

Kleine Einstimmung

„Das Unendliche hat

wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt;

das Unendliche hat

wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt.“

David Hilbert (deutscher Mathematiker, 1862 - 1943)

Ein Blick in die Kulturgeschichte der exakten Wissenschaft zeigt, dass schon ihre Begründer, etwa die Vorsokratiker, mit dem Unendlichen gerungen haben, und seit der Antike war und ist das Unendliche ein oft kontrovers diskutiertes Thema von Philosophen, Mathematikern, Physikern, Astronomen und Theologen.

Ein interessanter und auf den ersten Blick merkwürdiger Aspekt dabei ist die Tatsache,

dass wir das Unendliche im gewöhnlichen Alltag direkt nicht bemerken.

Insbesondere das mathematische Studium des Unendlichen zeigt indes, dass es dicht unter der manifesten Oberfläche der Erscheinungen enthalten ist und auf den zweiten Blick durchaus wahrgenommen werden kann.

Georg Cantor, Teil 1

1845^{greg.} (St. Petersburg) - 1918 (Halle/Saale)



- 1860 Schulabschluss „mit Auszeichnung“, Ingenieur-Studium in Darmstadt.
- 1862 f. Mathematik-Studium: Zürich, Univ. Berlin, Univ. Göttingen. Lehrer Karl Weierstraß, Ernst Eduard Kummer, Kronecker.
- 1867 Promotion Univ. Berlin, danach dort Gymnasiallehrer.
- 1869 f. Bis Lebensende i. Halle/S. (Habilitation, Priv.-Doz., Prof., Emeritiertg. 1913).
- 1874 f. Heirat (6 Kinder), Freundschaften mit Edmund Husserl, Richard Dedekind.

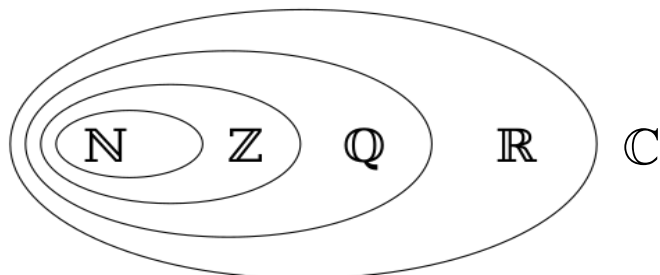
1874 - 1897: Georg Cantor begründete die Mengenlehre.

Cantor: *Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

- 1884 f. Bis Lebensende bipolare Störung, psych. Behandlung, Missgunst von Kollegen.
- 1914 f. (Erster Weltkrieg:) Armut und Mangelernährung.

Hierarchie der Zahlen: Die wichtigsten Zahlenbereiche

- 1) **Natürliche Zahlen \mathbb{N} (hier): 1, 2, 3, 4 ... oder auch \mathbb{N}_0 : 0, 1, 2, 3, 4 ...**
Man kann nicht uneingeschränkt subtrahieren (z. B. 5 minus 6).
- 2) **Ganze Zahlen \mathbb{Z} : -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3,**
Man kann nicht uneingeschränkt dividieren (z. B. 5 : 6).
- 3) **Rationale Zahlen \mathbb{Q} sind Brüche aus 2 ganzen Zahlen (Nenner $\neq 0$).**
Man kann nicht uneingeschränkt radizieren (z. B. $\sqrt{2}$).
- 4) **Reelle Zahlen \mathbb{R} („Kontinuum“)**
enthalten zusätzlich die irrationalen Zahlen ($\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π , Φ u. v. a. m.)
- 5) **Komplexe Zahlen \mathbb{C} : Jede algebraische Gleichung positiven Grades ist lösbar.**
(z. B.: $x^2 - 1 = 0$ im Reellen lösbar, $x^2 + 1 = 0$ im Reellen nicht lösbar, aber beide Gleichungen sind im Bereich der komplexen Zahlen lösbar.)



**Jeder höhere Zahlenbereich
enthält alle niederen Zahlenbereiche.**

In jedem dieser Zahlenbereiche gibt es interessante Entdeckungen zum Unendlichen.

Natürliche Zahlen \mathbb{N}

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$. $\{\dots\}$ Symbol für eine *Menge*.

1, 2, 3, 4, ... : einfachstes Beispiel einer unendlichen Folge,
denn gäbe es eine größte Zahl, bräuchte man nur 1 addieren.

Wir können uns das schrittweise vorstellen: „potenzielles Unendlich“.

Pythagoras (um 570 v. u. Z. - nach 510 v. u. Z.) und die Pythagoreer
gewannen aus Zahlenmustern, „figurierten Zahlen“, mathematische Erkenntnisse:

Beispiel 1)

```

*   o o o o
* *  o o o
* * * o o
* * * * o
    
```

Summe der ersten n natürlichen Zahlen:

2 Dreiecke aus Steinchen wie in der Abb. aneinandergesetzt
ergeben n Zeilen zu je n + 1 Steinchen.

Daraus folgt die Summenformel

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n \cdot (n + 1) / 2.$$

Beispiel 2)

```

. * . * . * . *
* . * . * | . *
* . * | * | . *
* | * | * | . *
    
```

Summe der ungeraden natürlichen Zahlen:

Ungerade Zahlen: 1, 3, 5, 7 ... darstellbar als $(2n - 1)$, $n = 1, 2, 3, 4 \dots$:

Muster aus ineinander geschachtelten Quadratzahlen:

Man kann ablesen: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Nochmals Beispiel 1):

Carl Friedrich **Gauß (1777 - 1855) als Neunjähriger trickreich** $1 + 2 + 3 + \dots + 100$:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 100 \\
 100 & 99 & 98 & 97 & \dots & 1 \\
 \hline
 101 & 101 & 101 & 101 & \dots & 101,
 \end{array}$$

die doppelte Summe ist also $100 \cdot 101$.

Verallgemeinert ergibt sich **wie oben**: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Die beiden Gleichungen

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n \cdot (n + 1) / 2.$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

gelten für unendlich viele Fälle.

Dessen ungeachtet scheuten sich die Pythagoreer vor der Unendlichkeit; sie hielten die natürlichen Zahlen, die der Zahl 1 am nächsten waren (und damit die „endlichsten“ Zahlen, die am weitesten vom Unendlichen entfernt waren), für die reinsten Zahlen. Auch Gauß hatte Probleme mit der Unendlichkeit.

Die Primzahlen \mathbb{P} , eine wichtige Untermenge der natürlichen Zahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ...

Es gibt unendlich viele Primzahlen, wie schon Euklid (um 325 v. u. Z.) erkannte.

Beweis:

Annahme einer endlichen Menge $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_r\}$ von Primzahlen,
daraus die Zahl $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots \cdot p_r + 1$.

Diese Zahl ist durch keine der Primzahlen p_i teilbar, da immer ein Rest 1 bleibt.
Damit sind die Primfaktoren von n nicht in der Ausgangsmenge enthalten,
man kann also zu jeder endlichen Menge von Primzahlen eine weitere Primzahl
hinzufügen.

**⇒ Wir können etwas über das Unendliche aussagen,
ohne unendlich lange darüber nachgedacht zu haben.**

**NB.: Größte bekannte Primzahl (gefunden Dez. 2018): $2^{82\,589\,933} - 1$,
hat $\lg(2^{82\,589\,933} - 1) = 82\,589\,933 \cdot \lg(2) = 24\,862\,048$ Stellen.**

https://en.wikipedia.org/wiki/Largest_known_prime_number, abgerufen 28 March 2024

Gödelisierung (nach Kurt Gödel, 1906 - 1978)

Jedem Wort, Satz oder Text kann eine Zahl zugeordnet werden: „Gödelnummer“.

Beispiel 1: Freier Fall im Vakuum (Galilei um 1590): $s = g \cdot t^2/2$

(s = Weg, t = Zeit, g= Fallbeschleunigung). Anders geschrieben: „g mal t mal t : 2 = s“.

Willkürliche Zuordnungsvorschrift (Codierung):

g		mal		t		durch		2		s		=
1		2		3		4		5		6		7.

Die den Zeichen zugeordneten natürlichen Zahlen werden zu Primzahlexponenten und alle Primzahlpotenzen werden in aufsteigender Reihenfolge der Primzahlen

multipliziert: $2^6 \cdot 3^7 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^3 \cdot 19^4 \cdot 23^5 \approx 4,823 \cdot 10^{28}$.

Der genaue (nicht gerundete) Wert des Produkts ist die Gödelnummer der Aussage
 $s = g \cdot t^2/2$ (bzgl. der gewählten Codierung).

Bei Kenntnis der Codierung kann rückwärts aus der Gödelnummer auf den Inhalt der Aussage geschlossen werden. In ähnlicher Weise

kann jedem (noch so langen) Text eine einzige Zahl (Gödelnummer) zugeordnet werden, aus der sich rückwirkend der gesamte Text reproduzieren lässt.

Beispiel 2: „Alles ist Zahl“ (Essenz der pythagoreischen Philosophie)

Zuordnungsvorschrift:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z		
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26		
	Zwischenraum						Punkt							
	27						28							

$$\underbrace{2^1 \cdot 3^{12} \cdot 5^{12} \cdot 7^5 \cdot 11^{19}}_{\text{ALLES}} \cdot 13^{27} \cdot \underbrace{17^9 \cdot 19^{19} \cdot 23^{20}}_{\text{IST}} \cdot 29^{27} \cdot \underbrace{31^{26} \cdot 37 \cdot 41^8 \cdot 43^{12} \cdot 47^{28}}_{\text{ZAHL}}$$

Beim Ausmultiplizieren ergeben allein die Faktoren von 2^1 bis 19^{19} ein Produkt $> 10^{100}$, das die Möglichkeiten eines wissenschaftlichen Taschenrechners übersteigt.

Die Gödelnummer dieses einfachen Satzes ist also bereits unermesslich groß.

Im Prinzip aber lässt sich alles Wissen der Menschheit (das ja immerhin noch endlich ist) in einer einzigen natürlichen Zahl darstellen.

Selbst jene Zahl ist winzig ($\rightarrow 0\%$) gegenüber dem Unendlichen!

Die vollständige Induktion, ein wichtiges Beweismittel der Mathematik

Prof. Schnees Induktionswitz: 1. Teilbarkeit von 360; 2. schöne Frauen in Leipzig.

Trifft eine Aussage für wenige natürliche Zahlen zu, muss sie nicht für alle zutreffen.

Beispiel:

$$f(n) = n^2 - n + 41$$

$$f(0) = 0^2 - 0 + 41 = 41$$

$$f(1) = 1^2 - 1 + 41 = 41$$

$$f(2) = 2^2 - 2 + 41 = 43$$

$$f(3) = 3^2 - 3 + 41 = 47$$

$$f(4) = 4^2 - 4 + 41 = 53$$

.....

$$f(40) = 40^2 - 40 + 41 = 1601: \quad \text{Bis } n = 40 \text{ ergeben sich immer Primzahlen.}$$

Aber $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 1681: \quad \text{durch 41 teilbar!}$

$$f(42) = 42^2 - 42 + 41 = 42 \cdot (42 - 1) + 41 = 42 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot (42 + 1) = 41 \cdot 43 \quad \text{auch!}$$

$$f(43) = 43^2 - 43 + 41 = 43 \cdot (43 - 1) + 41 = 43 \cdot 42 + 41: \quad \text{wieder eine Primzahl.}$$

Ergebnis: Vermutungen über die weitreichende Gültigkeit von Aussagen über natürliche Zahlen müssen für jeden Einzelfall genau geprüft werden.

Schema: - Induktionsannahme: die betreffende Aussage.

- **Induktionsanfang:** Die Aussage gilt für eine Anfangszahl n .

- **Prüfung:** Gilt die Aussage auch für die nächste Zahl $n + 1$?

- Wenn ja, dann gilt die Aussage für *alle* auf n folgenden natürlichen Zahlen.

Beispiel: Potenzmenge = Menge aller Teilmengen

1 Element $\{a\}$:

Teilmengen: $\{a\}, \{\emptyset\}$ = „leere“ Menge, also 2 Teilmengen = 2^1 .

2 Elemente $\{a, b\}$:

Teilmengen: $\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{\emptyset\}$, also 4 Teilmengen (davon 3 echte) = 2^2 .

3 Elemente $\{a, b, c\}$:

Teilmengen: $\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\emptyset\}$ also 8 Teilmengen = 2^3 .

- Induktionsannahme:

Die Potenzmenge einer Menge von n Elementen enthält 2^n Teilmengen.

- Induktionsanfang: Für $n = 3$ Elemente sind es 2^3 Teilmengen.

- Prüfung für $n+1$ Elemente: Zu den bisherigen Teilmengen kommen noch diejenigen dazu, die zusätzlich das neue Element enthalten: Verdopplung, d. h. $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$:

Die Induktionsannahme ist bestätigt.

Wieder gilt dies für unendlich viele, beliebig große Mengen.

Was heißt zählen?

Zählen ist eine eindeutige Zuordnung, Paarung von Objekten mit den natürlichen Zahlen, beginnend mit eins, aufwärts den Objekten zugeordnet, *Bijektion*.

Beispiel:

3 Objekte: Kreis K, Parallelogramm P, Dreieck D: \Rightarrow

3 geordnete Paare: (K ; 1), (P ; 2), (D ; 3).

Danach lassen sich keine weiteren Objekte mit Zahlen verknüpfen, und weil 3 die größte Zahl ist, die wir zuordnen konnten, wissen wir, dass es 3 Objekte sind.

Allg. ist die letzte zugeordnete Zahl die Gesamtzahl der Dinge: die „Kardinalzahl**“.**

**Das gleiche Abzählprinzip lässt sich auch auf unendliche Mengen anwenden:
Um herauszufinden, „wie viele“ Elemente in einer unendlichen Menge enthalten sind,
weisen wir jedem Element eine natürliche Zahl zu und sehen, wie weit wir kommen.**

Galileis Paradoxon (in seinem Hauptwerk *Discorsi ...*, 1635)

Zuordnung der Quadratzahlen zu einer natürlichen Zahl:

n^2 :	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	...
n :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

Geordnete Paare: (1 ; 1), (4 ; 2), (9 ; 3), (16 ; 4) ... (n^2 ; n) ...

Einerseits ist es wieder eine Bijektion, denn wir kommen beliebig weit, d. h. **es gibt „genauso viele“ Quadratzahlen wie natürliche**, andererseits ist die Folge n anscheinend viel größer als n^2 , denn sie enthält unendlich viele Elemente 2, 3, 5, 6, 7... mehr.

Galilei war darüber bestürzt:

Er hat dieses Paradoxon aufgedeckt, konnte es aber nicht lösen.

Galileis Entdeckung: Eine unendliche Menge kann in der Zahl ihrer Elemente mit einer kleineren Teilmenge ihrer selbst übereinstimmen.

Ein noch einfacheres Beispiel (andere Untermenge von \mathbb{N}): die geraden Zahlen.

(2 ; 1), (4 ; 2), (6 ; 3), (8 ; 4) ...

Mächtigkeit

Dieser wichtige Begriff stammt aus Georg Cantors Mengenlehre:

Zwei Mengen nennen wir **gleichmächtig** (Zeichen \sim), **wenn wir ihre Elemente paaren können, ohne dass dabei etwas übrig bleibt**. Wenn etwas übrig bleibt von einer der beiden Mengen, dann sagen wir, diese Menge habe die größere Mächtigkeit.

Also ist die unendlich große Menge der natürlichen Zahlen mit ihrer unendlich großen Untermenge der Quadratzahlen gleichmächtig.

Definition einer unendlichen Menge nach Richard Dedekind (1831 - 1916):

**Eine Menge heißt unendlich, falls sie zu einer echten Teilmenge gleichmächtig ist.
(Verallgemeinerung der Entdeckung Galileis.)**

Ganze Zahlen \mathbb{Z}

Die Menge \mathbb{Z} umfasst die Zahlen ... -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...

Diese Folge hat keinen Anfang und kein Ende:

Nun haben wir 2 Arten von Unendlich!

Aber:

Mächtigkeit der ganzen Zahlen

Trick:	\mathbb{Z} :	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	...	
	\mathbb{N} :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	=>

Die Elemente von \mathbb{Z} können durchnummeriert werden! D. h. Bijektion zw. \mathbb{Z} und \mathbb{N} , also:

Die Menge der ganzen Zahlen hat die gleiche Mächtigkeit wie die der natürl. Zahlen.

Solche Mengen heißen abzählbar unendlich.

Diophantische Gleichungen

$f(x_i) = 0$, wobei $f(x_i)$ Polynomfunktion,
nur ganzzahlige (nichttriviale) Lösungen gesucht.

Beispiele:

- Pythagoreische Tripel:

(z. B. $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$...)

$a^2 + b^2 = c^2$: unendlich viele Lösungen!

Aber

- Großer fermatscher Satz ≈ 1640 :

(Beweis: Andrew Wiles 1994)

$a^n + b^n = c^n$, $n > 2$: keine einzige Lösung!

Rationale Zahlen \mathbb{Q}

- Die rationalen Zahlen erweitern den Bereich der ganzen Zahlen:
Sie sind „Brüche“ mit Zähler und Nenner aus jenen.
- Darstellungen: gemeine Brüche, Dezimalbrüche, Kettenbrüche.

Gemeine Brüche

entsprechen nicht ausgeführten Divisionen (außer Division durch 0):

- Unendlich viele mögliche Zähler, unendlich viele mögliche Nenner.
- Unendlich viele Darstellungen des Wertes einer Bruchzahl („Äquivalenzklassen“),
die durch Erweitern und Kürzen ineinander übergeführt werden können.

Dezimalbrüche

haben unendlich viele periodische Nachkommastellen („abbrechend“ heißt Periode 0).

Sie sind also i. Allg. unendliche Darstellungen endlicher Zahlen. Beispiele:

- a) $\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,3$. Man kann die unendlich vielen Dreien nicht alle hinschreiben,
das exakte Ergebnis wäre erst nach unendlich vielen Divisionsschritten erreichbar.
Trotzdem kennt man alle Eigenschaften (z. B. dass die Hälfte davon $\frac{1}{6}$ ist).
- b) $\underline{1} = 1/1 = 1,000000\dots = \underline{1,0} = 9/9 = 1/9 \cdot 9 = 0,111111\dots \cdot 9 = 0,999999\dots = \underline{0,9}$. (Also:)
Auch bei der Dezimalbruchdarstellung existieren mehrere gleichwertige Formen.

Darstellung der rationalen Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden:

Die Zahlengerade ist überall „dicht“, d. h. **zwischen je zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele andere**, z. B. zwischen 1,000 000 000 0 und 1,000 000 000 1 und jedem anderen Intervall (man kann etwa jeweils immer die Mittelwerte bilden).

Wir haben hier **wieder eine neue Form der Unendlichkeit!**

Kettenbrüche

Ein Kettenbruch ist ein gemischter Bruch der Form $a + b/x$, bei dem der Nenner x wieder die Form eines gemischten Bruchs hat (i. Allg. mehrfach):

$$a + \frac{b}{c + \frac{d}{e + \frac{f}{\ddots}}}$$

Alle Teilnenner sind positiv,
a, b, c ... ganzzahlig.¹

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Besonders wichtig: reguläre Kettenbrüche: →

Alle Zähler haben den Wert 1.

Beide Formen können ineinander übergeführt werden, deshalb genügt es i. Allg., die regulären Kettenbrüche zu betrachten.

Abgekürzte Schreibweise der regulären Kettenbrüche: $[b_0 ; b_1, b_2, b_3, \dots]$.

¹ Der letzte Nenner muss der Eindeutigkeit wegen > 1 sein.

Reguläre endliche Kettenbrüche

Ein Kettenbruch heißt endlich, wenn er nach einer natürlichen Zahl $n > 1$ abbricht. Jede rationale Zahl lässt sich in einen endlichen regulären Kettenbruch entwickeln.

Beispiel: $\frac{43}{30} = 1,433333333\dots$ Trick: Eine Zahl ist gleich 1 / ihren Kehrwert:

$$\frac{43}{30} = 1 + \frac{13}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

Abgekürzte
Schreibweise:
[1; 2, 3, 4].

Alle 3 Ausdrücke gleichwertig, Kettenbruch aber viel einfacher als Dezimalbruch.

Es zeigt sich: **Das Unendliche verschwindet bei Kettenbrüchen rationaler Zahlen.**

Der Kehrwert $\frac{30}{43} = 0,6976744186$ ergibt sich als Kettenbruch zu [1, 2, 3, 4].

Ebenso bei anderen Beispielen gilt:

Die Zahl x und ihr Reziprokes 1/x unterscheiden sich nur durch das Semikolon.

Also anders als in der Dezimalbruchdarstellung lässt die Perspektive des Kettenbruchs den Zusammenhang beider unmittelbar erkennen.

Reihen²

Eine Reihe (früher meist *unendliche Reihe* genannt)
ist eine Summe mit unendlich vielen Summanden.

Beispiel 1: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$

Beispiel 2: $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots$

Eine Reihe divergiert, wenn sie keiner endlichen Summe S zustrebt (Beispiel 1)

Eine Reihe konvergiert, wenn sie einer endlichen Summe S zustrebt (Beispiel 2)

Spezialfälle:

Arithmetische Reihe:

Benachbarte Glieder unterscheiden sich durch einen konstanten Summanden (Beispiel 1).

Geometrische Reihe:

Benachbarte Glieder unterscheiden sich durch einen konstanten Quotienten (Beispiel 2).

(Summe von Beispiel 2: Geschichte vom Eisessen)

² [https://de.wikipedia.org/wiki/Reihe_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Reihe_(Mathematik)): Exzellent ausgezeichnete Artikel, 78 Seiten.

Beispiel 3: Achilles und die Schildkröte (Zenon von Elea, um 460 v. u. Z.)

Die Teilwege des Achilles bilden eine **geometrische Reihe**: Der Quotient q zweier benachbarter Glieder ist konstant: $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$. Die Zeit t_E konnte Zenon nicht bestimmen, weil der exakte Begriff der Geschwindigkeit damals nicht bekannt war.

Sicher war es Zenon klar, dass der schnelle Läufer die langsame Schildkröte einholt.

Was man damals nicht verstehen konnte, ist der scheinbare Widerspruch zur intuitiven Anschauung, dass in einer endlichen Strecke das Unendliche enthalten sein sollte!

Derartige Paradoxien konnten in der griechischen Antike nicht gelöst werden.

Sie wiesen auf beunruhigende Eigenschaften des Unendlichen und auf Schwierigkeiten hin, die uns erwarten, wenn wir versuchen, die Bedeutung unendlicher Prozesse und Phänomene zu verstehen. **Zenons Paradoxien haben Generationen von Logikern und Mathematikern veranlasst, sich mit ihnen auseinanderzusetzen. Sie haben den Blick dafür geschärft, dass sich die einleuchtendsten, selbstverständlich scheinenden Annahmen und Aussagen, wenn man ihnen kritisch auf den Grund geht, als zweifelhaft, brüchig, widerspruchsvoll herausstellen können...**

(Hans Joachim Störig)

Wir Heutigen können mit unendlichen Summen gut umgehen und sie berechnen.

Auch andere Paradoxien des Unendlichen haben die Mathematiker mittlerweile verstanden.

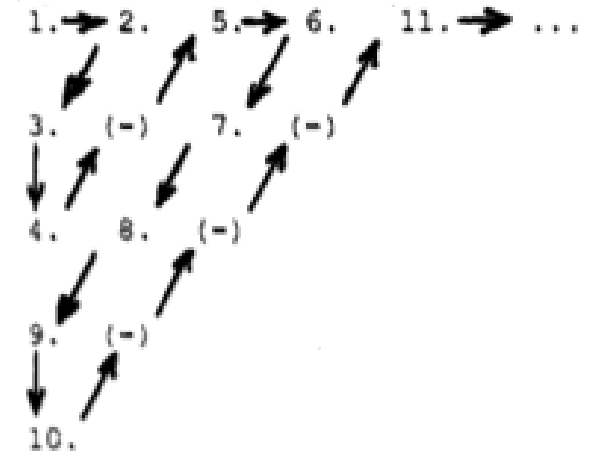
Einen großen Anteil daran hat Georg Cantor.

Georg Cantor, Teil 2: Cantors erstes Diagonalargument

Wie bereits dargestellt sind die ganzen Zahlen mit ihren verschiedenen Untermengen abzählbar. Im Jahr 1874 konnte Cantor durch ein scharfsinniges Argument zeigen, dass auch die rationalen Zahlen abzählbar sind: Dazu zweidimensionale Anordnung:

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...
4/1	4/2	4/3	...		
5/1	5/2	...			
...					

Das Schema li. wird „diagonal“ durchlaufen (rechts); dabei sind die kürzbaren Brüche (-) zu überspringen, weil bereits in den unkürzbaren Brüchen enthalten: →



Man erkennt, dass sich die Brüche tatsächlich abzählen lassen, erhält also auf diese Weise eine Abzählung (Nummerierung) der positiven rationalen Zahlen:

1	1/2	2	3	1/3	1/4	2/3	3/2	4	5	1/5	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Kann man auch alle rationalen Zahlen abzählen?

Ja: Gleiches Schema wie eben:

1	1/2	2	3	1/3	1/4	2/3	3/2	4	5	1/5	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Zusätzlich (wie vorher bei den ganzen Zahlen):

Einfügen der Null sowie nach jeder positiven Zahl die entsprechende Gegenzahl:

0	1	-1	1/2	-1/2	2	-2	3	-3	1/3	-1/3	1/4	-1/4	2/3	-2/3	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

Ergebnis:

Alle rationalen Zahlen sind abzählbar unendlich wie die natürlichen Zahlen, beide Mengen sind also gleichmächtig, es gibt „ebenso viele“ rationale wie natürliche Zahlen.

Reelle Zahlen \mathbb{R} („Kontinuum“)

Obwohl die Zahlengerade in jedem noch so kleinen Intervall unendlich viele rationale Zahlen enthält (sie ist überall dicht), hat sie (bzgl. der rationalen Zahlen) noch Lücken:

Zahlen, die man exakt nicht als Bruchzahlen darstellen kann: irrationale Zahlen.

Schon die Pythagoreer entdeckten irrationale Zahlen:

$$\sqrt{5} = 2,236\dots, \sqrt{2} = 1,4142\dots$$

Einteilung der reellen Zahlen

- Rationale Zahlen \mathbb{Q}

- Irrationale Zahlen \mathbb{I}

- Algebraische irrationale Zahlen \mathbb{A}

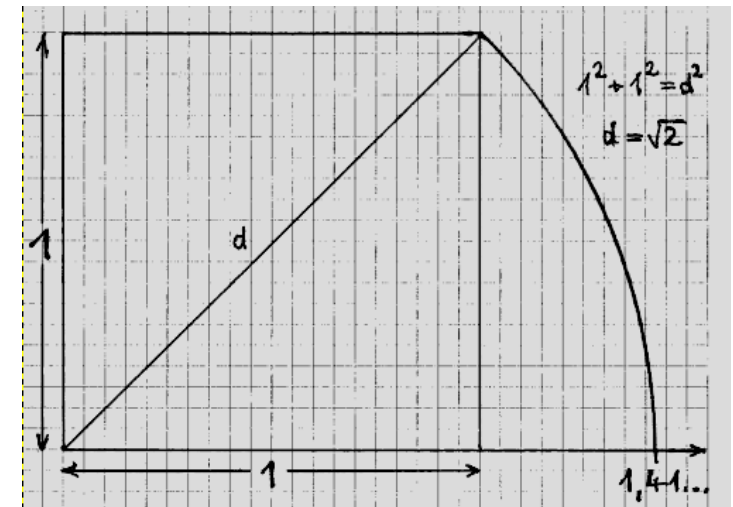
algebraische Zahlen: Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten.

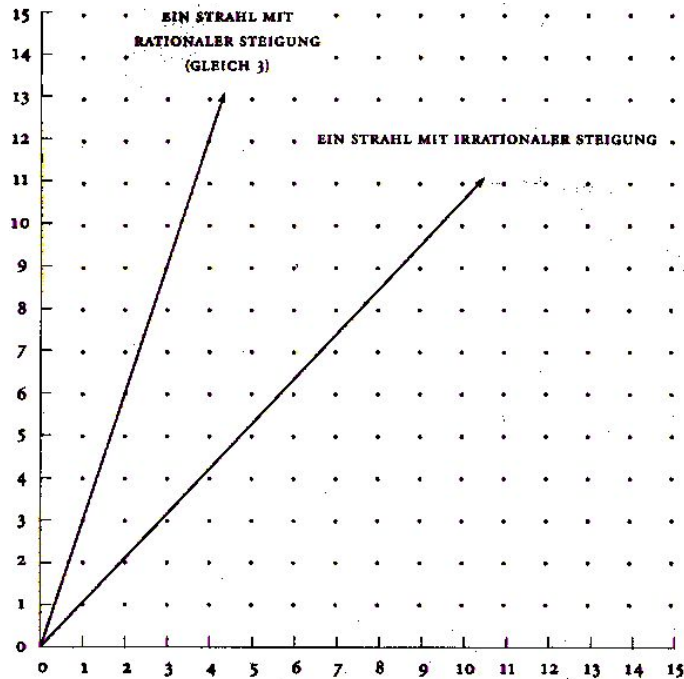
Beispiele: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ (Lösungen der Gl. $x^2 - 2 = 0$ bzw. $x^2 - 5 = 0$), Φ (gold. Schnitt, s. u.)

- Transzendente Zahlen (sind immer irrational)

alle Zahlen, die nicht algebraisch sind.

Beispiele: π , e .





Unterschiede zw. rationalen und irrationalen Zahlen

1. Geometrisch veranschaulicht³:

Ein Strahl mit rationaler Steigung trifft ∞ viele Punkte des Punktgitters, ein Strahl mit irrationaler Steigung trifft außer $(0 ; 0)$ keinen einzigen Punkt des Punktgitters.

2. Die Dezimalbruchdarstellung

der irrationalen Zahlen besteht aus ∞ vielen Stellen, in denen keine Periode erkennbar ist.

Beispiel: $\sqrt{2} = 1,4142135623730950\dots$

3. Kettenbrüche irrationaler Zahlen brechen nicht ab, jede irrationale reelle Zahl lässt sich auf genau eine Weise in einen unendlichen regulären Kettenbruch entwickeln.

Unendliche Kettenbrüche sind stets irrationale Zahlen. =>

Dezimal- und Kettenbruchdarstellungen irrationaler Zahlen sind also unendliche Darstellungen endlicher Zahlen.

³ Abb. aus Aczel, Amir D., Die Natur der Unendlichkeit, S. 95.

Beispiel: Entwicklung der Wurzel von 2 in einen Kettenbruch*:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} &= 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{1 \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1)}} \\
 &= 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{2}}{2-1}} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} \quad \text{d.h.} \\
 \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} \\
 \sqrt{2} &= [1; 2, 2, 2, \dots] = [1; \overline{2}]
 \end{aligned}$$

*) Übergang von 2. zu 3. Zeile: Wiederholte Anwendung des bisherigen Ergebnisses.

Vergleich: $\sqrt{2} = 1,41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ 24209\ 69807\ 85696\ 71875\ 37694\ \dots$

1. Die Kettenbruchdarstellung ist (bei diesem u. a. Beispielen) viel einfacher.
2. Während die Dezimalbruchentwicklung völlig unregelmäßig ist, erkennen wir hier (wie auch bei den folgenden Zahlen) eine Regelmäßigkeit, die man vorher gar nicht vermuten konnte!

Die eulersche Zahl e als weitere wichtige Irrationalzahl

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995\ \dots$$

Definition: Grenzwert einer Folge:
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

oder als Reihe:
$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

Als regulärer Kettenbruch, von Leonhard Euler (1707 - 1783) gefunden:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \dots] :$$

**Es ist ein Muster erkennbar (das sich bis ins Unendliche fortsetzt),
jedoch keine Periode.**

**Von e gibt es eine große Anzahl weiterer interessanter Kettenbruchdarstellungen
(reguläre und nichtreguläre) mit Symmetrien, aber nicht periodisch.**

Der goldene Schnitt als weitere Irrationalzahl

Zwei reelle Zahlen $a > b > 0$, z. B. die Längen zweier Strecken, stehen genau dann im Verhältnis des goldenen Schnitts Φ , wenn die Gleichung gilt:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi \quad (*)$$

Die größere Zahl verhält sich zur kleineren wie die Summe aus beiden zur größeren.

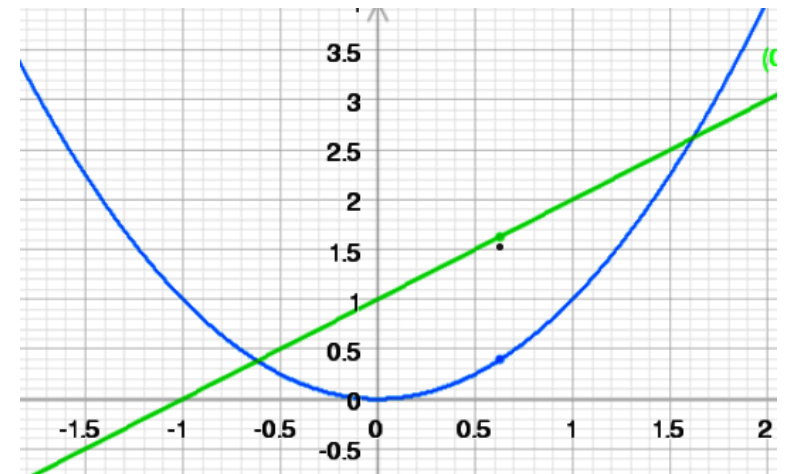
$$\Phi = 1 + 1/\Phi \quad (**), \quad \Phi^2 = \Phi + 1 \quad (***),$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Die positive Lösung $\Phi = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) \approx 1,618\dots$,
genauer $\Phi \approx 1,6180339887498948482\dots$

Aus **(**)** $\Rightarrow 1/\Phi = \Phi - 1$ und **(***)**:
 $1/\Phi, \Phi, \Phi^2$ haben die gleichen
 ∞ vielen Nachkommastellen.

Aus **(*)** \Rightarrow , wenn $a + b = 1$, $1/a = \Phi$,
 $a = 1/\Phi = \Phi - 1 \approx 0,618 = \underline{61,8 \%}$, $b \approx \underline{38,2 \%}$.



Aus der wiederholten Anwendung von () $\Phi = 1 + 1/\Phi$ folgt**

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\Phi}}}}}$$

Der unendliche Kettenbruch besteht also nur aus unendlich vielen Einsen, $\Phi = [1; \bar{1}]$.

Aus Gleichung (*) $\Phi^2 = \Phi + 1$ folgt $\Phi^2 = 1 + \Phi$, $\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$ und durch wiederholtes Radizieren folgt die unendliche Kettenwurzel**

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad , \text{ auch nur aus unendlich vielen Einsen.}$$

Am Beispiel des goldenen Schnitts ist also gut erkennbar, dass sich gewisse Eigenschaften der Zahlen (wie hier Symmetrien) erst bei geeigneter Darstellung zeigen.

Der goldene Schnitt im regelmäßigen Fünfeck

**Vielfach, z. B. als Quotient aus Diagonale und Seite,
auch bei sich schneidenden Diagonalen.**

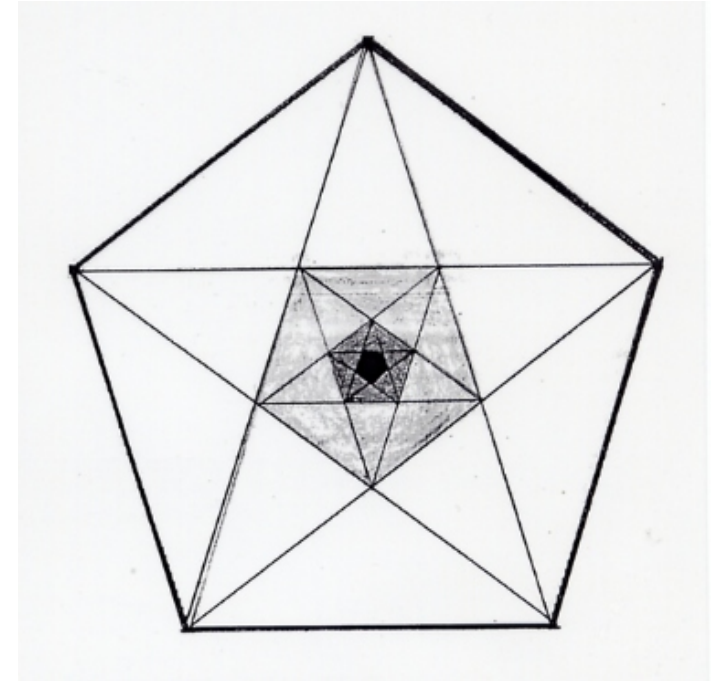
Zusammenhang des goldenen Schnitts mit den Fibonacci-Zahlen:

**Die unendliche Folge der Fibonacci-Zahlen
besteht aus den Anfangsgliedern 0 und 1;
alle weiteren Glieder
sind die Summe der beiden vorigen Glieder:**

$$f_n: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

**Die Verhältnisse zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen (ab 1, 1)
näheren sich alternierend dem goldenen Schnitt $\Phi \approx 1,618$:**

$$1 : 1 = 1, \quad 2 : 1 = 2, \quad 3 : 2 = 1,5, \quad 5 : 3 \approx 1,7, \quad 8 : 5 = 1,6, \quad 13 : 8 = 1,625 \dots$$



Die Kreiszahl π als weitere wichtige Irrationalzahl

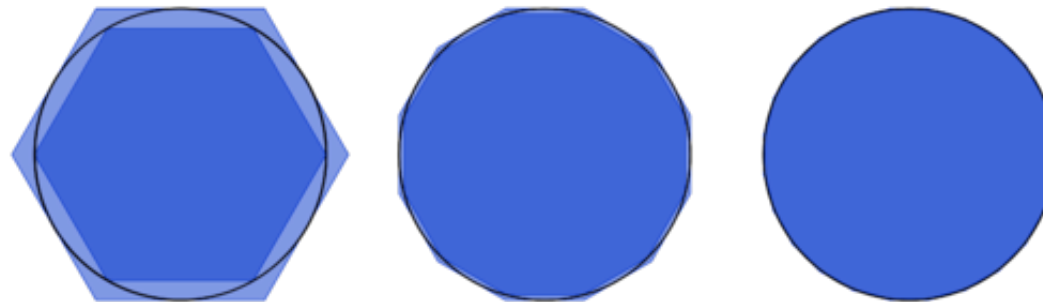
$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 169\ 399\ 375\ 105\ 820\ 974\ \dots$

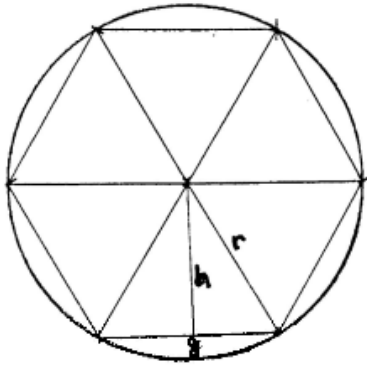
Die Kreiszahl π , das Verhältnis von Umfang U zum Durchmesser $D = 2r$ eines Kreises, war schon in sehr früher Zeit praktisch wichtig, z. B.

- für die Berechnung der Länge eines Radbeschlages, der Fläche eines runden Feldes
- für die Berechnung des Rauminhalts eines zylindrischen Speichers.

Archimedes von Syrakus (um 250 v. u. Z.) bewies: $\pi = A/r^2$, $A =$ Kreisfläche.

Er näherte sich mit um- und einbeschriebenen regelmäßigen Vielecken (Polygonen) dem Kreis an (vom 6-Eck bis 96-Eck), um Näherungswerte für A und π zu erhalten:





Fläche eines der gleichschenkligen Dreiecke: $g \cdot h / 2$
Fläche des n-seitigen Vielecks: $n \cdot g \cdot h / 2$
Exakte Kreisfläche: Vieleck aus unendlich vielen Seiten:
Kreisfläche ($n \rightarrow \infty, \Rightarrow n \cdot g \rightarrow U, h \rightarrow r$):
 $A = \lim n \cdot g \cdot h / 2 = U \cdot r / 2 = 2\pi r \cdot r / 2 = r^2 \pi.$

=> Selbst bei der Berechnung einer Kreisfläche braucht man also das Unendliche!

Beweis der Irrationalität von π : Johann Heinrich Lambert 1761 oder 1767.

Beweis der Transzendenz von π : Ferdinand von Lindemann 1882

(D. h. „Quadratur des Kreises“ nicht exakt möglich).

Für π gibt es viele Darstellungen als Reihen und unendliche Kettenbrüche

z. B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \dots = \frac{\pi}{4}$$

bzw.

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{\ddots}}}}}$$

Normalität von Pi (wahrscheinlich, aber noch nicht bewiesen).

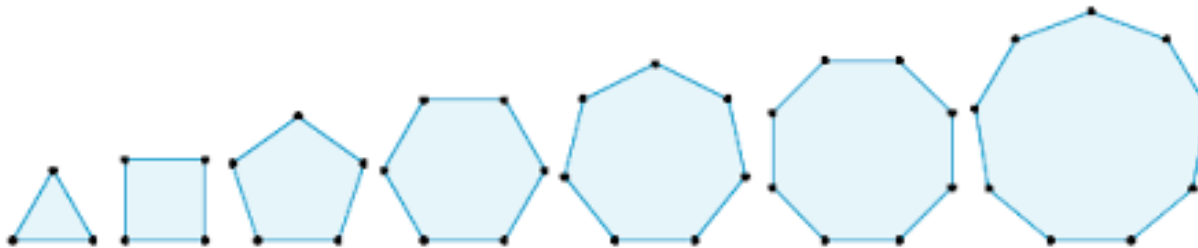
Eine reelle Zahl heißt normal, wenn in ihren Nachkommastellen jeder Ziffernblock vorkommt und Ziffernblöcke gleicher Länge gleich häufig auftreten.

<https://www.angio.net/pi/>: The string 050938 occurs at position 92603.

Buchstaben in eine Zahlenfolge kodiert: Man würde ALLE Bücher in Pi finden!

Nachtrag: Regelmäßige von Geraden begrenzte geometrische Gebilde

Im 2-Dimensionalen:



**Regelmäßige Polygone
gibt es unendlich viele.**

Im 3-Dimensionalen: (scheinbar reichhaltiger):



**Platonische Polyeder
gibt es nur 5!**

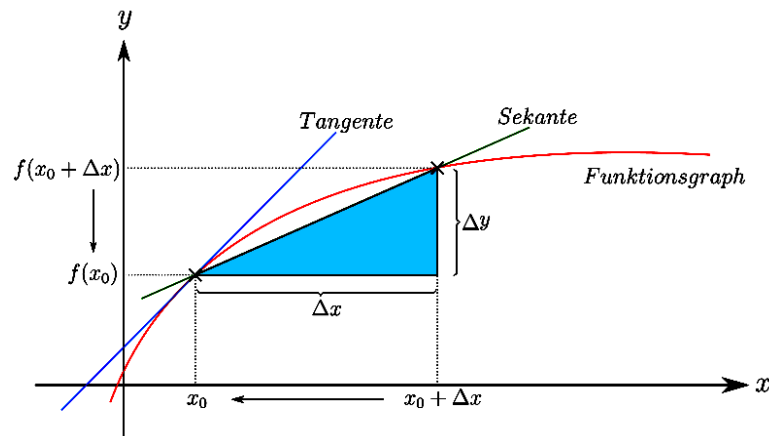
Infinitesimalrechnung

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), Isaac Newton (1643 - 1727)

Eine Zeitlang zwei Hauptprobleme der Mathematik: Bestimmung

- a) der Tangente an eine gegebene Kurve: => **Differentialrechnung,**
b) der unter einer gegebenen Kurve eingeschlossenen Fläche => **Integralrechnung.**

Differentialrechnung



**Z. B. Momentangeschwindigkeit:
y = Weg, x = Zeit.**

Steigung der Sekante: $\Delta y / \Delta x$.

Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

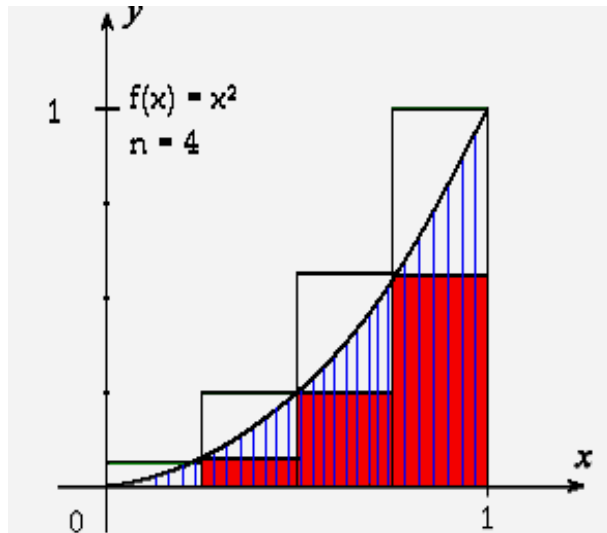
**Man führt den anderen Sekanten-Punkt immer
näher an den Punkt $(x_0, f(x_0))$ heran.**

**Dabei gehen sowohl Δy als auch Δx gegen Null
(werden ∞ klein, ∞ kleines Steigungsdreieck).**

Der Bruch $\Delta y / \Delta x$ bleibt aber in vielen Fällen endlich.

**Wenn 0 als Ergebnis eines Grenzübergangs aufgefasst wird, ist der Bruch $0/0$ sinnvoll,
kann je nach Problem vielerlei bedeuten (sog. unbestimmter Ausdruck, s. u.).**

Integralrechnung



**Der unter einer gegebenen Kurve eingeschlossene Flächeninhalt kann durch eine Summe vieler schmaler Rechtecke $\Delta x \cdot f(x)$ angenähert werden.
Je feiner die Aufteilung, umso genauer das Ergebnis.**

**Beim Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ geht die Fläche der Rechtecke nach 0, deren Anzahl nach ∞ :
Die Summe aus vielen Summanden wird zum bestimmten Integral.**

**Rein formal haben wir hier $0 \cdot \infty$,
Verbindung (Produkt) des ∞ Kleinen mit dem ∞ Großen:
wieder ein unbestimmter Ausdruck,
aber je nach Problem mit sinnvollem Ergebnis.**

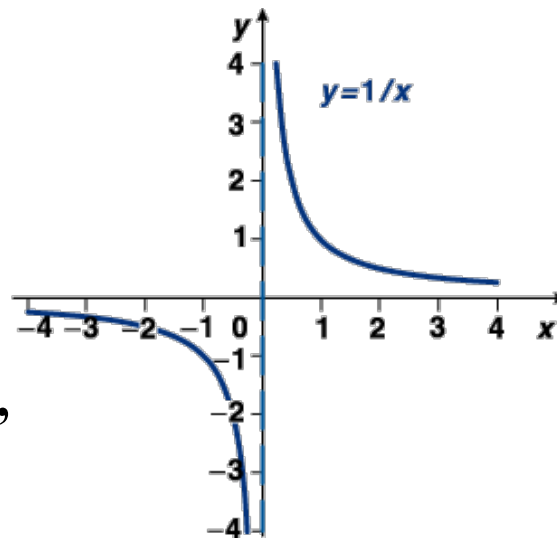
Unbestimmte Ausdrücke

sind $\infty - \infty$, $0/0$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞ , ∞^0 , 1^∞ , auch (eingeschränkt) 0^0 .

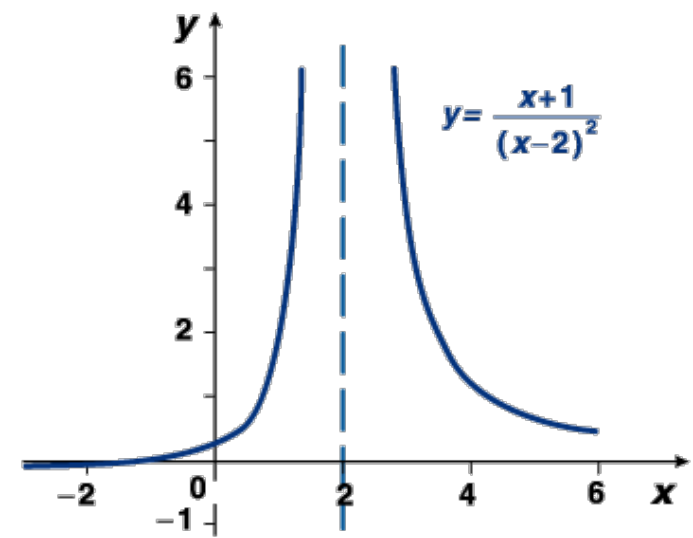
Etwa als Grenzwerte von Funktionen lassen sie sich gewöhnlich durch geeignete Umformungen, Grenzwertsätze bzw. mit der Regel von de l'Hospital eindeutig bestimmen.

An einer Polstelle

wird der Funktionswert $+\infty$ oder $-\infty$; der Graph hat eine Lücke und eine senkrechte Asymptote. Bei ungerader Ordnung der Polstelle springt die Funktion von $+\infty$ nach $-\infty$, (der Graph aus dem positiven in den negativen Bildbereich) oder umgekehrt.



Pol ungerader Ordnung



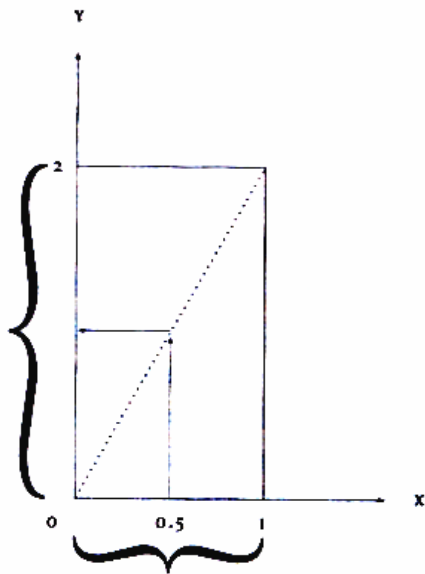
Pol gerader Ordnung

Bolzano Paradoxie

Bernardus Bolzano (*1781 in Prag; † 1848 in Prag)

Bolzano fragte sich, ob die reellen Zahlen eine ähnliche Eigenschaft erkennen ließen wie diejenige, die Galilei bei den natürlichen Zahlen entdeckt hatte.

Abb. ↓⁴: Er betrachtete die Funktion $y = 2x$ für das Intervall $[0, 1]$:



Bijektion: Jeder reellen Zahl zwischen 0 und 1 wird genau ein Partner zwischen 0 und 2 zugewiesen: . Beide Zahlenmengen sind unendlich.

Bolzano schloss: Es gibt genauso viele Zahlen zwischen 0 und 1 wie zwischen 0 und 2, obwohl das zweite Intervall 2mal so lang ist wie das erste.

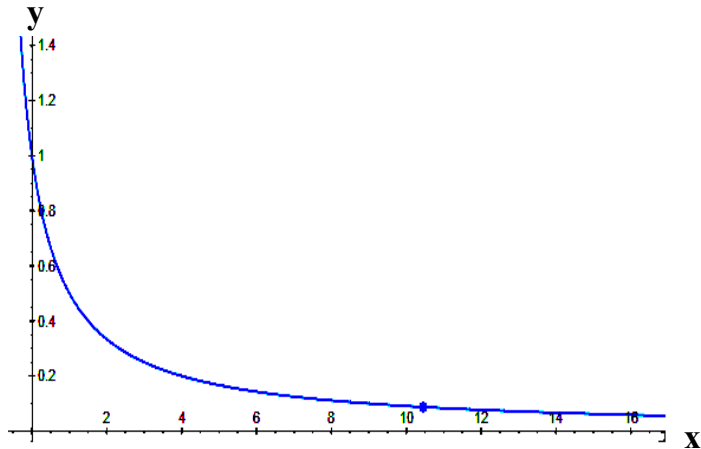
Verallgemeinerungen:

- Beliebige monotone Funktionen (z. B. $y = 78x$),
- Der Argumentbereich muss nicht 0 bis 1 sein. =>

Jedes abgeschlossene Intervall besitzt ebenso viele Zahlen wie jedes andere abgeschlossene Intervall.

⁴ Abb. nach Aczel, Amir D., Die Natur der Unendlichkeit, S. 68.

Bolzanos Paradoxie, Forts.



Drastisches Beispiel:

$$y = 1/(x + 1) :$$

Die Menge aller positiven reellen Zahlen

im Intervall $\{x \mid 0 < x < \infty\}$

**wird bijektiv auf das kleine Intervall $\{y \mid 0 < y < 1\}$
abgebildet.**

Wieder wie schon vorher:

**Das Prinzip „Das Ganze ist größer als sein Teil“ (Aristoteles, Euklid)
gilt nicht bei unendlichen Mengen!**

Ähnlich wie bei Galilei mit seinem Paradoxon konnte sich Bolzano

nicht zu der klaren Aussage durchringen, dass die beiden Mengen „gleich“ seien.

**Bolzano schlug aber vor, in der Möglichkeit solcher Zuordnungen geradezu das
Charakteristikum unendlicher Mengen zu sehen - wie später Dedekind präzisierete, s. o.**

**„Ungeachtet einiger [früherer] zaghafter Versuche ... war es Bolzano und kein
anderer, der als Erster den Weg zu unserer modernen Vorstellung vom
mathematischen Unendlichen geebnet hat.“**

Jean-Paul Delahaye

Georg Cantor, Teil 3: Cantors zweites Diagonalargument

Cantor untersuchte längere Zeit die Frage, ob sich auch die reellen Zahlen abzählen lassen, und fand auf 2 verschiedene Arten (1874 und 1877) die Antwort. Sein prinzipieller Gedankengang von 1877 sei an einem Beispiel gezeigt:

Er betrachtete zunächst das **Einheitsintervall** $\{x \mid 0 < x < 1\}$ mit der **Annahme**: **Alle reellen Zahlen in diesem Intervall lassen sich den natürlichen Zahlen zuordnen**, d. h., es wäre eine Zuordnungsliste möglich wie in Cantors erstem Diagonalverfahren:

$$\begin{array}{l}
 x_1 = 0, \underline{1} 2 3 4 5 6 7 8 \dots \\
 x_2 = 0, 1 \underline{0} 1 0 0 1 0 0 \dots \\
 x_3 = 0, 7 7 \underline{7} 7 7 7 7 7 \dots \\
 x_4 = 0, 0 9 0 \underline{9} 9 0 9 9 \dots \\
 \dots \\
 x_n = 0, x_{n1} x_{n2} x_{n3} x_{n4} x_{n5} x_{n6} x_{n7} x_{n8} \dots \\
 \dots
 \end{array}$$

Nun **Konstruktion einer neuen reellen Zahl b** nach folgender Vorschrift:
 $b = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 \dots$, wobei $b_i = 0$ für $x_{nn} \neq 0$ und $b_i = 9$ für $x_{nn} = 0$.
 Im Beispiel also $b = 0,0900\dots$.

**Die neue Zahl b unterscheidet sich
von der ersten Zahl mindestens in der ersten Dezimalstelle,
von der zweiten in der zweiten Dezimalstelle usw.,
sie kann also nicht in der Liste enthalten sein.**

**Wir haben die Annahme, die Liste enthalte alle reellen Zahlen im Einheitsintervall,
folglich zu einem Widerspruch geführt, also gezeigt:
Zwischen den Zahlen 0 und 1 existieren mehr reelle Zahlen als es natürliche gibt.**

**Verallgemeinerung: Man kann zeigen⁵, dass nicht nur die unendlich vielen Zahlen im
Intervall von 0 bis 1, sondern die **Menge aller reellen Zahlen** nicht mehr abzählbar ist:
„überabzählbar“.**

Überabzählbar sind auch unendlich viele Teilmengen von \mathbb{R} , z. B. beliebige Intervalle.

**Die Menge der reellen Zahlen ist größer als die Menge aller rationalen Zahlen.
Dies ist eine höhere Art der Unendlichkeit!**

Anders gesagt:

**Wird jeder irrationalen Zahl eine natürliche Zahl zugeordnet, gibt es noch immer
unendlich viele irrationale Zahlen, die keiner natürlichen Zahl zugeordnet sind.**

⁵ https://de.wikipedia.org/wiki/Cantors_zweites_Diagonalargument mit Beispiel einer Bijektion entsprechend Bolzanos Beispiel.

Cantor hat weiter gezeigt, dass die Menge der algebraischen Zahlen noch abzählbar ist. D. h., die Mächtigkeit der transzendenten Irrationalzahlen ist höher als die Mächtigkeit der rationalen u. algebraischen Zahlen - wieviel höher, konnte er aber nicht sagen, s. u.

Georg Cantor, Teil 4

Die natürlichen Zahlen sind uns mit intuitiver Sicherheit gegeben, sie existieren für uns. Diese Sicherheit fehlt uns bei den irrationalen Zahlen, denn niemand hat die vollständige Dezimalbruch-Entwicklung von $\sqrt{2}$, π u. ä. wirklich gesehen. Für Irrationalzahlen gibt es zwar Verfahren, sie näherungsweise zu ermitteln, und die Mathematiker konnten gut mit $\sqrt{2}$ oder π rechnen. Bis zur Zeit Cantors wusste man aber nicht, was $\sqrt{2}$ oder π eigentlich darstellen, denn das Ausrechnen der unendlich vielen Nachkommastellen wäre ja ein unendlich langer Prozess, daher *potenzielles Unendlich*. Man war der Auffassung, dass die Ziffernfolge bei der Dezimalbruchentwicklung der Reihe nach erst *geschaffen* wird.

Jedoch Cantor: Es gibt von vornherein unabhängig von etwaigen Näherungsrechnungen die unendlichen Dezimalzahlen $\sqrt{2}$, π usw., und die gesamte Folge von Nachkommastellen ist ein für alle Male vorgegeben: *aktuales Unendlich*. Die Ziffernfolge wird lediglich wieder herausgesucht, gefunden, *ent-deckt*.

Kommentare:

1) Beispiel eines prinzipiellen mathematik-philosophischen Problems:

Ist die Mathematik eine Erfindung oder eine Entdeckung?

Mario Livio (*1945, israelischer Astrophysiker) : **Sie ist beides,**

s. sein Buch *Ist Gott ein Mathematiker?*, dtv 2014, Kap. 9.

2) **Noch heute sind Mathematiker über das Unendliche unterschiedlicher Meinung.⁶**

Georg Cantor, Teil 5

Cantor bezeichnete die Mächtigkeit der unendlichen Mengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R} mit \aleph_0 , Aleph-null (*Aleph*: erster Buchstabe des hebräischen Alphabets), es ist die „kleinste“ Unendlichkeit.

Satz von Cantor:

Auch bei unendlichen Mengen sind

ihre Potenzmengen mächtiger als die Mengen selbst.

Cantor fand eine Leiter von immer mächtigeren Unendlichkeiten: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots$

⁶ https://de.wikipedia.org/wiki/Potentielle_und_aktuelle_Unendlichkeit.

Die Kontinuumshypothese

Cantor vermutete 1878:

Die Mächtigkeit der reellen Zahlen sei $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$,
also gleich der Mächtigkeit der Potenzmenge von \aleph_0 ,
d. h. **es gäbe keine Menge, deren Mächtigkeit *zwischen* der Mächtigkeit
der natürlichen Zahlen und der Mächtigkeit der reellen Zahlen liegt.**

In Hilberts berühmter Liste von 23 mathematischen Problemen (Paris 1900)
steht die Kontinuumshypothese an erster Stelle.

Cantor versuchte diese seine Hypothese zu beweisen oder zu widerlegen:
Er kam wiederholt zu unterschiedlichen Ergebnissen.

Nach Cantors Tod wurde bewiesen,

dass sie im Rahmen der jetzigen Mathematik unentscheidbar ist:

Kurt Gödel (1938): Die Kontinuumshypothese lässt sich *nicht widerlegen*.

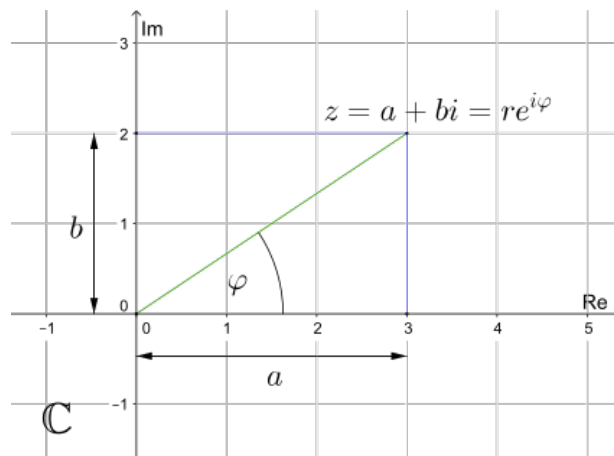
Paul Cohen (1960er): Sie lässt sich *nicht beweisen*. (1966 Fields-Medaille.)

Damit ist sie das erste relevante Beispiel für Gödels 1. Unvollständigkeitssatz.

Aug. 2019: Martin Goldstern, Jakob Kellner (Wien) und Saharon Shelah (Jerusalem):
Es gibt mindestens 8 weitere Unendlichkeiten zwischen \mathbb{N} und \mathbb{R} .

Komplexe Zahlen \mathbb{C}

Erweiterung der reellen Zahlen, um auch Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ lösen zu können. Hier wird $\sqrt{-1}$ als Rechenzahl betrachtet, mit Symbol i bezeichnet. Dadurch bleiben alle bisherigen Rechenregeln erhalten, gleichartige Aufgaben haben gleichartige Lösungen, alle bisher betrachteten Zahlenmengen sind in der erweiterten Menge \mathbb{C} enthalten. Allgemeine Form der komplexen Zahlen: $z = a + i \cdot b$, wobei a und b reelle Zahlen sind, a Realteil und b (oder $i \cdot b$) Imaginärteil. Sie können nicht mehr auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden, aber in der 2-dimensionalen gaußschen Zahlenebene oder auf der (ebenfalls 2-dimensionalen) riemannschen Zahlenkugel:



Gaußsche Zahlenebene:

$$r = |z|, \quad r^2 = a^2 + b^2,$$

$$a = r \cdot \cos \varphi, \quad b = r \cdot \sin \varphi.$$

(Eulersche Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \Rightarrow)$$

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

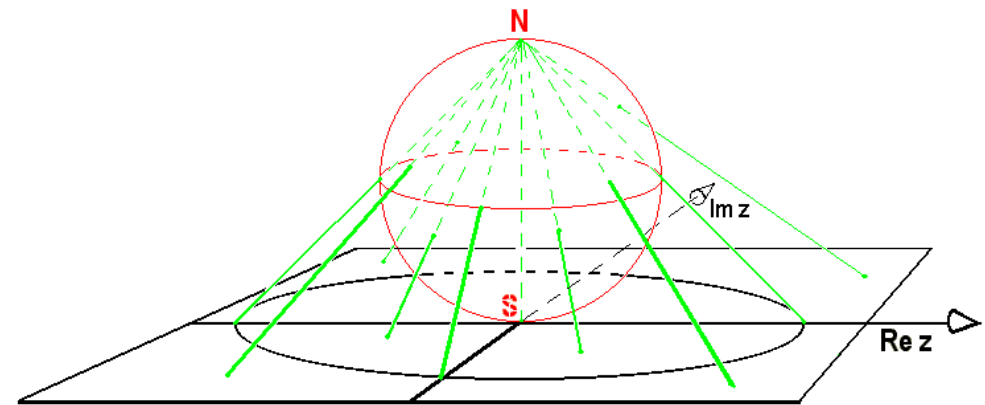
**unendlich viele Richtungen
(unendlich viele Zahlengeraden)
mit jeweils
unendlich vielen Beträgen:**

$\infty \cdot \infty .$

Riemannsche Zahlenkugel⁷:

(Bernhard Riemann 1826 - 1866)

Die komplexen Zahlen werden aus der gaußschen Zahlenebene auf die Oberfläche einer Kugel projiziert.



Jedem Punkt der Ebene

(also jeder komplexen Zahl) entspricht ein Punkt auf der Kugeloberfläche (Kompaktifizierung der Ebene).

Riemann hatte damit das Prinzip von Bolzano auf die komplexen Zahlen erweitert.

Es ergibt sich interessanterweise

der „Nordpol“ als stetiges Bild aller unendlich fernen Punkte der Ebene.

So gesehen existiert vom Standpunkt der komplexen Zahlen nur eine „Zahl“ ∞ .

Andererseits: Periodizität der e-Funktion:

Der eulerschen Formel zufolge ist die e-Funktion im Komplexen periodisch, was u. a. bedeutet: Es existieren **für den Logarithmus unendlich viele Lösungen:**

$$\ln z = \ln |z| + i \cdot (\varphi + 2k\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z} .$$

⁷ <http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/#816b1d>.

Exkurs: Gebrochene Dimensionen: Kurzer Einblick in die fraktale Geometrie

Erweiterung der euklidischen Geometrie, begründet 1975 durch Benoît Mandelbrot.

Bis jetzt noch keine umfassende Definition von Fraktalen.⁸ Aber:

Hinreichende Bedingungen:

Eine Struktur ist ein Fraktal, wenn sie a) selbstähnlich ist oder/und b) eine gebrochene Dimension hat. (Es gibt auch nicht-selbstähnliche Fraktale und Fraktale mit ganzzahliger Dimension.)



a) Selbstähnlichkeit einer Struktur dann, wenn disjunkte (getrennte, sich nicht überlappende) Teile von ihr verkleinerte Kopien des Ganzen sind. D. h., vergrößert man ein Fraktal um einen bestimmten Vergrößerungsfaktor, entsteht ein Objekt, das aus disjunkten Teilen besteht, die exakte Kopien des ursprünglichen Fraktals sind.

b) (Selbst-)Ähnlichkeitsdimension $D = \log(\text{Zahl der Teile}) / \log(\text{Verkleinerungsfaktor})$.
Beispiel 1: Dieses Wurmfarne-Blatt $\approx 1,8$.

⁸ http://www.math.uni-bremen.de/didaktik/ma/ralbers/Veranstaltungen/MaDenken1313/Material/Dim_Skript_K2a.pdf.

Beispiel 2: Georg Cantor, Teil 7: Die Cantor-Menge (Cantor-Staub), 1883

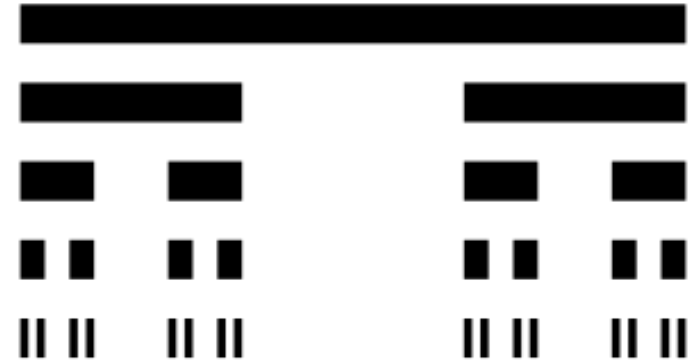
Cantor gehört nach Bolzano und neben Weierstraß zu den ersten Mathematikern, die sich mit Fraktalen befasst haben.

Konstruktion der Cantor-Menge:

Aus dem abgeschlossenen Intervall der reellen Zahlen von 0 bis 1 entfernt man das offene mittlere Drittel, d. h.

alle Zahlen zwischen $1/3$ und $2/3$. Aus den beiden übrig gebliebenen Intervallen wird wiederum jeweils das mittlere Drittel entfernt. Dieses „Wegwischen“ wird unendlich oft wiederholt. Die **übrig bleibenden Intervalle werden** dabei immer mehr, aber immer kleiner - **im Grenzfall zu überabzählbar unendlich vielen Punkten -, ihre Gesamtlänge geht indes nach Null**. Da die entstehende Figur komplett aus verkleinerten Kopien von sich selbst zusammengesetzt werden kann, ist sie exakt selbstähnlich. Sie erweist sich als total unzusammenhängend („cantorsches Diskontinuum“), ist nirgends dicht und hat die Mächtigkeit der reellen Zahlen. Weil in jedem Konstruktionsschritt 2 um den Faktor 3 kleinere Kopien der Menge erzeugt werden, beträgt ihre

Ähnlichkeitsdimension $D = \log 2 / \log 3 = 0,6309\dots$, also zwischen den Dimensionen der Punkte (= 0) und der ursprünglichen Strecke (= 1).



Beispiel 3: Sierpinski-Dreieck (Wacław Sierpiński, 1882 - 1969)



Initiatorfigur: Dreieck, aus dem man ein mittleres kleines Dreieck herausschneidet. Diese Prozedur wird für die neu entstehenden Dreiecke oft wiederholt.

Bei jedem Schritt

verringert sich die Gesamtfläche, die im Grenzfall nach Null geht. Die Anzahl der Teildreiecke und damit der Umfang (Gesamtlänge der Konturen) wird dagegen unendlich.

Die Ähnlichkeitsdimension beträgt $D = \log 3 / \log 2 = 1,585\dots$, die entstehende Grenzfigur ist also weder Fläche ($D = 2$) noch Linie ($D = 1$).

Wie die Beispiele illustrieren, zeigen Fraktale wieder eine neue Art von Unendlichkeit.

Georg Cantor, Teil 8: Höhere Dimensionen

**Aus Cantors bisheriger Forschung ergab sich die Frage,
ob es mehr Punkte in der Ebene als auf der Geraden gäbe.**

**Wieder ohne Verlust der Allgemeinheit
kann man sich auf das Intervall zwischen 0 und 1 beschränken:**

**Jeder Punkt des Einheitsquadrats ist durch das Koordinatenpaar (a, b) darstellbar,
mit $a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ und $b = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$**

Cantor fand folgende Transformation vom Quadrat auf die Strecke:

$0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 a_4 b_4 \dots$

(Wechsel zwischen den Dezimalbruchziffern der beiden Koordinaten).

Damit hat jeder Punkt des Quadrats eine Entsprechung auf der Zahlengeraden.

Cantor schloss daraus:

Es gibt ebenso viele Punkte auf der Ebene wie auf der Geraden.

Ähnliche Argumente führten Cantor zur Einsicht:

**Die Zahl der Punkte auf der Zahlengeraden
ist gleich der Zahl der Punkte im 2-, 3-, 4- und höherdimensionalen Raum.**

Anders ausgedrückt:

**Jeder kontinuierliche Raum, von der eindimensionalen Geraden
bis zum n-dimensionalen Raum, hat ebenso viele Punkte wie das Kontinuum \mathbb{R} .**

Beispiel:

Ein Würfel enthält ebenso viele Punkte wie eine seiner Kanten.

Damit ist ein verblüffendes und völlig unerwartetes Ergebnis gewonnen.

Cantor war bestürzt:

Ich sehe es, aber ich glaube es nicht, schrieb er an seinen Freund Dedekind.

Georg Cantor, Teil 9: Einige Würdigungen

Georg Cantor hatte ein schwieriges Leben, z. T. wegen fachlicher Kontroversen mit maßgebenden Kollegen. Sein reichhaltiges mathematisches Lebenswerk war gleichwohl

bahnbrechend für die Fundierung der heutigen Mathematik.

Edmund Landau (deutscher Mathematiker, 1877 - 1938) über Georg Cantor:

**„Er gehörte zu den größten und genialsten Mathematikern
aller Länder und aller Zeiten,
aus dessen Werken die spätesten Generationen lernen werden.“**

David Hilbert :

**„Niemand wird uns wieder aus dem Paradies vertreiben,
das Georg Cantor für uns eröffnet hat.“**

Karl-Peter Dostal,

Einige Streifzüge in die Unendlichkeit

Betrachtungen zur Unendlichkeit des Weltalls

Kleine Einstimmung⁹

Man freut sich, dass eine Welt so ganz außerhalb unser selbst existiert.

Sofja Kowalewskaja über die Mathematik

Die Natur spricht die Sprache der Mathematik: Die Buchstaben dieser Sprache sind Dreiecke, Kreise und andere mathematische Figuren.

Galilei

Wie ist es möglich, dass die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht?

Einstein

Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.

Einstein

⁹ Die Begriffe Universum, Weltall und Kosmos werden hier synonym verwendet.

=> Kosmologie:

- Andere Aspekte des Unendlichen als Mathematik:

- Empirische Erforschung der kosmischen Erscheinungen und deren Interpretation,
- Räumliche und zeitliche Unendlichkeit des Kosmos.

- Gleich sind:

- Benutzung mathematischer Methoden,
- Streben nach Widerspruchsfreiheit,
- Streben nach Präzision,
- Intuition, Kreativität, Hypothesen.

Vier denkbare Möglichkeiten zur räumlichen Unendlichkeit:

- Das Weltall ist unendlich,
- das Weltall ist nicht unendlich,
- es gibt eine dialektische Einheit von Endlichkeit und Unendlichkeit,
- es ist falsch, beide Begriffe auf das Weltall anzuwenden.

Eine dieser Möglichkeiten muss richtig sein, aber keine kann man sich vorstellen.

Dazu drei Kommentare:

Erklärung Immanuel Kants (1724 - 1804):

Die menschliche Vernunft hat das besondere Schicksal ..., dass sie durch Fragen belästigt wird, die sie nicht abweisen kann; denn sie sind ihr durch die Natur der Vernunft selbst aufgegeben, die sie aber auch nicht beantworten kann, denn sie übersteigen alles Vermögen der menschlichen Vernunft.

Kritik der reinen Vernunft, 1. Auflage, Vorrede

Erklärung (frei) nach Ludwig Boltzmann (1844 - 1906):

Der Trieb zu philosophieren scheint uns unausrottbar angeboren zu sein.

[Unsere] Denkgesetze haben sich nach den Gesetzen der Evolution ... behufs Erfassung des zum Lebensunterhalt Notwendigen, des praktisch Nützlichen herausgebildet. Aber wie beim Saugen des Kleinkinds am leeren Kautschuk ... schießen auch die Denkgesetze oft über das Ziel hinaus, wie etwa beim Philosophieren.¹⁰

Es bestand evolutionär keine Notwendigkeit, über Unendlichkeit nachzudenken.

Èmile Borel (französischer Mathematiker, 1871 - 1956):

Wer weiß, ob das gesamte sichtbare Universum nicht nur wie ein Wassertropfen auf der Erdoberfläche ist? Die Bewohner dieses Wassertropfens ... könnten sich nicht vorstellen, dass sich außerhalb des Tropfens ein Stück Eisen oder lebendes Gewebe befinden, in denen die Materie-Eigenschaften völlig anderer Natur sind.¹¹

¹⁰ Engelbert Broda, Ludwig Boltzmann – Mensch, Physiker, Philosoph, Dt. Verl. d. Wiss: Bln. 1957, S. 101, 125, 129.

¹¹ Zit. n. John Barrow, Einmal Unendlichkeit und zurück, rororo-TB, S. 146.

Einige Aussagen sind dennoch möglich:

- 1. Wäre das Weltall unendlich ausgedehnt und/oder bestünde es schon unendlich lange, ergäben sich Widersprüche zu unserer Erfahrung:
=> klassische Paradoxa der Kosmologie, s. u. !**
- 2. Wissenschaftliche Prognosen über ferne Zeiten, entsprechend dem jetzigen Wissensstand.**

Exkurs: Die Weltbilder von Kopernikus, Kepler und Newton

Nikolaus Kopernikus (1473 - 1543) und Johannes Kepler (1571 - 1630)

Die Planeten einschließlich der Erde drehen sich um die Sonne.

Die Sonne ist der Mittelpunkt der Welt. Das Weltall ist räumlich begrenzt.

Das Weltall Isaac Newtons (1643 - 1727)

- wurde einst von Gott geschaffen,**
- ist von da an statisch,**
- räumlich unendlich und zeitlich unendlich,**
- gleichmäßig mit Materie erfüllt:
unendlich viele Sterne von durchschnittlich gleicher Helligkeit.**

Die 3 klassischen Paradoxa der Kosmologie in heutigem Licht

1. Photometrisches Paradoxon, olberssches Paradoxon (Kepler, Olbers 1823)

*Der Nachthimmel müsste bei unendlich vielen Sternen [Sonnens] taghell sein,
denn man trüfe in jeder Blickrichtung auf einen Stern.*

Warum ist es nachts dunkel? Heutige Antwort:

- Die **Sterne mit hoher Leuchtkraft sind zu weit von uns entfernt. Die Sterne sind „zu dünn gesät“.**
Wäre Rigel (ca. 770 Lj) so nahe wie Sirius (8,6 Lj), wäre der Nachthimmel hell.
- **Licht mit seiner endlichen Geschwindigkeit von 300 000 km/s**
kann uns in der endlichen Zeit von 13,8 Mrd. a, seitdem das Universum existiert,
nur aus einem endlich großen Bereich erreichen,
in dem sich **nur endlich viele Sterne** entwickelt haben,
deren **Lebensdauer** zudem **endlich** ist.
- **Viele Arten von Strahlungen des Weltraums sind für uns unsichtbar**
(Infrarot, Ultraviolett, Mikrowellen, Röntgenstrahlung, Gammastrahlung, kosmische Höhenstrahlung, Neutrinos).
- (- Interstellare Dunkelwolken reduzieren die Helligkeit von dahinter liegenden Sternen.)
- **Insbes. führt die Expansion des Universums zur Verschiebung der Wellenlängen des Lichts**
ferner Galaxien und der kosmischen Hintergrundstrahlung ins Unsichtbare.

Energetische und „eigentliche“ Lösung:

Es gibt zu wenig Energie im Universum, um den Nachthimmel aufzuhellen.

2. Gravitationsparadoxon, Hugo von Seeliger, Carl Neumann, um 1900

In einem unendlich ausgedehnten Weltall mit unendlich vielen Sternen können keine stabilen Systeme (z. B. unser Sonnensystem) existieren, weil aus je 2 entgegengesetzten Richtungen unendlich große Zerrkräfte ziehen.

Heutige Antwort (s. o.): Die Sterndichten in den Galaxien sind sehr niedrig (nächster Stern Proxima Centauri $4,2 \text{ Lj} = 43 \cdot 10^{12} \text{ km}$).

3. Thermodynamisches Paradoxon: „Wärmetod“

Für den Fall, dass das Universum ein abgeschlossenes System wäre:

Alle Energiequellen müssten längst erschöpft sein, d. h. aus der Sicht der kalten Bestandteile des Weltalls, also die Erwärmung aller kühlen Systeme auf eine höhere, gemeinsame Temperatur, bei der alle thermischen Prozesse zum Erliegen kommen.

Heutige Antwort: Das Weltall ist noch jung genug.

Historische Ergänzungen

- **Die wissenschaftliche Kosmologie beruht**
 1. auf astronomischen Beobachtungen ab 1912
mit im Laufe der Jahrzehnte immer besseren Teleskopen und Methoden,
 2. auf Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie (ART) von 1915.
- 1922 - 1924: Alexander Friedmann: Nach der ART kann **das Universum** nicht stationär sein, sondern **muss entweder expandieren oder kontrahieren**.
- 1927: **Georges Lemaître (1894 - 1966) entdeckte die Expansion des Weltalls: wie Mikroben auf einer Seifenblase**, wenn man sie weiter aufbläst.
- 1931: **Lemaître**: gedanklich die Expansion rückwärts: **Entdeckung des „Urknalls“**.
- 1932/33 Jan Hendrik Oort, Fritz Zwicky (ab 1960 Vera Rubin): **„dunkle Materie“**.
- 1964: Arno Penzias und Robert W. Wilson entdeckten die kosmische Hintergrundstrahlung (**Bestätigung der Urknall-Theorie**).
- 1998 Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt, Adam Riess u. a. beobachteten, dass sich die Ausdehnung des Universums beschleunigt: **„dunkle Energie“**.

Jetziger Erkenntnisstand über das Universum: Lambda-CDM-Modell¹²

(Lambda: dunkle Energie, CDM: kalte dunkle Materie, einfachstes Modell, das gut mit den Messungen übereinstimmt: „Standardmodell“.)

- Alter des Universums: 13,8 Mrd. Jahre**
- Zusammensetzung gegenwärtig:**
 - Baryonische Materie (die aus Atomen bestehende „gewöhnliche“ Materie): 4,9 %,**
 - dunkle Materie 26,6 %,**
 - dunkle Energie 68,5 %.¹³**
- Beobachtbare Universum:**
 - Wir können knapp 46,6 Milliarden Lichtjahre in jede Richtung blicken.**
 - => Durchmesser etwa 93 Milliarden Lichtjahre!¹⁴**
- Das gesamte Universum könnte endlich oder unendlich sein.**

¹² <https://de.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM-Modell> , https://de.wikipedia.org/wiki/Beobachtbares_Universum

¹³ Planck-Weltraumteleskop 2018

¹⁴<https://scienceblogs.de/astrodicticum-simplex/2014/07/14/wie-gross-ist-das-universum>

Prognosen für fernere Zeiten: das gegenwärtig wahrscheinliche Szenario

Nur noch etwa 500 Millionen Jahre wird die Erde so wie heute bewohnbar sein. Die Leuchtkraft der Sonne nimmt mit der Zeit zu => Temperatur auf der Erdoberfläche steigt. => allmähliches Austrocknen der Ozeane.

Schon vorher müsste mit der Kolonisierung der Galaxis begonnen werden.

In wenigen Milliarden Jahren:

Verschmelzung unserer Galaxis mit der Großen Magellanschen Wolke.

Danach verschmilzt die nun größere Galaxis mit der Andromeda-Galaxie: Milkomeda:

Vorher füllt die Andromeda-Galaxie fast den ganzen Himmel aus.

→ größere elliptische Galaxie, diese bildet mit einigen weiteren eine Supergalaxie.

In 7,6 Milliarden Jahren:

1) Ende der Erde, sie stürzt in die aufgeblähte, sterbende Sonne.

2) Die Sonne (heute ein gelber Zwergstern) beginnt (im Alter von $\approx 12,2$ Mrd. Jahren) abzukühlen und zu schrumpfen, wird schließlich zu einem weißen Zwergstern: leuchtet über die Jahrtausende immer schwächer.

(Mit der Sonne als weißem Zwerg würde es auf der Erde zu kalt sein.)

Trotz möglichen Weiterlebens unserer fernen Nachkommen in anderen Sternsystemen nur vorübergehendes Überleben, denn ein ähnliches Schicksal wie die Sonne erleiden alle Sterne im ganzen Universum.

Die Stern-Entstehungsrate verringert sich im Laufe der Jahrtausenden immer mehr, bis keine neuen Sterne mehr entstehen. Am langlebigsten sind rote Zwergsterne, die Lebensbedingungen auf deren Planeten wären aber sehr ungünstig.

Die beschleunigte Expansion des Kosmos wird sich weiter fortsetzen.

In etwa 100 Bill. Jahren können sich keine neuen Sterne mehr bilden.

In 10^{37} - 10^{39} Jahren:

Gemäß der Grand Unified Theory zerfallen alle Protonen und Neutronen, auch die im Atomkern gebundenen => die gesamte uns vertraute Materie wird vernichtet.

Später zerstrahlen schließlich auch alle schwarzen Löcher.

Nach 10^{100} Jahren:

**Sämtliche Strukturen werden verschwunden sein,
es gibt dann nur noch**

**extrem kalte Strahlung und leichte Elementarteilchen in äußerst geringer Dichte,
es können keine Vorgänge mehr stattfinden.**

**Somit ist dann nicht nur der Raum inhaltsleer geworden und alle Materie zerfallen,
sondern**

**auch die Zeit hat ihre grundlegenden Eigenschaften Kausalität, Richtung und Dauer
verloren und sich damit ins Nichts aufgelöst.**

Folgende Seite: Einige Literatur-Empfehlungen

Einige Literatur-Empfehlungen

Aczel, Amir D., *Die Natur der Unendlichkeit*

John Barrow, *Einmal Unendlichkeit und zurück*

Spektrum der Wissenschaft Spezial 1/2001 *Das Unendliche*

Spektrum der Wissenschaft Spezial 2/2005 *Unendlich (plus eins)*

Spektrum der Wissenschaft Spezial Physik Mathematik Technik 3.22 *Unendlichkeiten*

Spektrum der Wissenschaft Highlights 1/11 *Ist Mathematik die Sprache der Natur*

Spektrum der Wissenschaft 3.24

Wikipedia
